ÜBER DAS INNERE DER ERDE

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

VORGELEGT

VON

WALTHER KLUSSMANN
AUS UCHTE

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

GÖTTINGEN
1915

Vorliegende Arbeit ist als Dissertation von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen angenommen.

Referent: Geh. Reg.-Rat Professor Dr. E. WIECHERT.

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Mai 1914.

Die Arbeit ist ein Sonderabdruck aus der Zeitschrift: »Gerlands Beiträge zur Geophysik« Band XIV, 1. Heft, 1915.

Literaturverzeichnis.

1. Über die Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von Laplace, Ivory, Gauss, Chasles und Dirichlet. Ostwalds Klass. der exakt. Wiss. Nr. 19.
2. Arrhenius, Schicksal der Planeten. Leipzig 1911.
3. Bruns, Die Figur der Erde.
4. Christiansen-Müller, Theoretische Physik. Leipzig 1910.
5. Credner, Elemente der Geologie. Leipzig 1906.
6. Geiger u. Gutenberg, Constitution des Erdinnern, erschlossen aus dem Bodenverrückungsverhältnis der einmal reflektierten zu den direkten Longitudinalwellen. Phys. Z. 1911. Nr. 19.
7. Geiger u. Gutenberg, Über Erdbebenwellen. Constitution des Erdinnern, erschlossen aus der Intensität longitudinaler und transversaler Erdbebenwellen, und einige Beobachtungen an den Vorläufern. Gött. Nachr. Math. Phys. Kl. 1912.
8. S. Günther, Handbuch der Geophysik. 1899.
9. Handwörterbuch der Naturwissenschaften. Band III.
10. Helmert, Mathematische und physikalische Theorien der höheren Geodäsie. Leipzig 1884.
11. F. Neumann, Kugelfunktionen. Leipzig 1883.
12. Newcomb, Populäre Astronomie. Leipzig 1905.
13. Oldham, The constitution of the earth as revealed by earthquakes. Quarterly Journal of Geol. Soc. London 1906.
14. E. Riecke, Lehrbuch der Physik. Leipzig 1908.
15. Rudzki, Physik der Erde. Leipzig 1911.
16. W. Thomson, On the Rigidity of the Earth. Philos. Trans. 1863.
17. Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik. Leipzig und Berlin 1911.
18. Verhandlungen der Gesellschaft dtsch. Naturf. und Ärzte zu Frankfurt a. M. 1896.
19. E. Wiechert, Über die Massenverteilung im Innern der Erde. Gött. Nachr. 1897, Heft 3.
20. Wiechert u. Zöppritz, Über Erdbebenwellen. Gött. Nachr. 1907.
21. Wiechert u. Zöppritz, Göttinger Berichte 1907.
22. Zöppritz u. Geiger, Über Erdbebenwellen. Gött. Nachr. 1909.
23. Zöppritz, Geiger u. Gutenberg, Über Erdbebenwellen. Gött. Nachr. 1912.

Inhaltsverzeichnis.

§ 1. Über die Ursache des Dichteunterschiedes zwischen dem Erdinnern und der Erdrinde.
§ 2. Über Druck und Temperatur im Erdinnern.
§ 3. Über den Aggregatzustand des Erdinnern.
§ 4. Inhaltsangabe der Wiechertschen Arbeit über die Massenverteilung im Innern der Erde.
§ 5. Über die neuesten Ergebnisse der Erdbebenforschung in bezug auf das Erdinnere. Problemstellung.
§ 6. Über das hydrostatische Gleichgewicht.
§ 7. Bezeichnungen.
§ 8. Numerische Werte.
§ 9. Gang der Rechnung. Aufstellung der Formeln. Die zu beachtende Genauigkeit.
§ 10. Numerische Rechnung unter Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung.
§ 11. Numerische Rechnung unter Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung.
§ 12. Kontrollrechnung.
§ 13. Folgerungen für die Schwerkraftvariation. Diskussion der Resultate. Material von Kern und Mittelschicht.

Die vorliegende Arbeit ist auf Anregung von Herrn Geh. Reg.-Rat Wiechert entstanden. Ihr Ziel ist die Berechnung der Gestalt der Erde und der Dichteverteilung in ihrem Innern, unter Voraussetzungen, von denen wir auf Grund der neuesten Forschung annehmen müssen, daß sie der Wirklichkeit entsprechen.

Es mögen zunächst einige einleitende Paragraphen eingeschaltet werden, die dazu dienen sollen, uns über die Vorstellungen, die wir uns über das Innere der Erde zu bilden haben, zu orientieren.

§ 1. Über die Ursache des Dichteunterschiedes zwischen dem Erdinnern und der Erdrinde.

Nur die äußerste Schicht der Erde — die Schicht bis zu 2000 m Tiefe — ist direkten Messungen zugänglich. Sie besteht in der Hauptsache aus Silikaten, deren Dichte im Mittel etwa 2,6 beträgt. Nun zeigen die Beobachtungen des Pendels in Verbindung mit den Bestimmungen der Gravitationskonstante, daß die mittlere Dichte der Erde zwischen 5,5 und 5,6 liegt; im Innern der Erde muß demnach die Dichte erheblich größer sein als in den äußeren Schichten. Zu derselben Annahme zwingen uns auch die Beobachtungen über Präzession und Nutation und über die Abplattung der Erde. Darüber also, daß die Erde zum Mittelpunkt hin dichter werden muß, darüber

herrscht Einigkeit unter den Forschern, aber die Ansichten darüber, worin die Ursache dieser Dichtevermehrung zu suchen sei, gehen in zwei Richtungen auseinander: Die eine Theorie behauptet, daß sie eine Folge des mit der Tiefe zunehmenden Druckes sei; danach müßte die Dichtezunahme stetig verlaufen, die Zunahme des Druckes wäre lediglich durch die darüber lastenden Gesteinsschichten bedingt. Auf dieser Voraussetzung beruht z. B. das Dichtegesetz von Legendre, welches durch folgende Formel gegeben ist:

$$\delta = \delta_c \frac{\sin nr}{nr}.$$

Dabei bedeutet δ die Dichte im Abstand r vom Mittelpunkt, δ_c die Dichte im Mittelpunkt und n ist eine Konstante. δ_c und n können aus der mittleren Dichte der Erde δ_m und ihrer Abplattung e bestimmt werden. Setzen wir diese gleich $\frac{1}{298}$ und δ_m gleich 5,53, so ergibt sich δ_c gleich 11,0 und $\bar{r} \cdot n$ gleich 2,487, wobei $\bar{r}$ den mittleren Radius der Erde bezeichnet. Setzen wir $\bar{r} = 6370$ km, so erhalten wir für die Dichte an der Oberfläche den Wert $\bar{\delta} = 2{,}69$, und dieser Wert kommt der Wirklichkeit sehr nahe. Es ist hiernach $\delta_c = 4{,}09\ \bar{\delta}$, d. h. der Druck im Mittelpunkt würde eine Kompression der Substanzen bis zur vierfachen der Dichte an der Erdoberfläche zur Folge haben. Eine bequemere, weil nicht transzendente, Formel ist die von Roche:

$$\delta = \delta_c \left\{1 - s\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right\},$$

worin die Bezeichnungen die gleiche Bedeutung haben wie oben. s ist eine Konstante $= 0{,}78$; die Rochesche Formel entsteht aus der Legendreschen durch Reihenentwicklung[1]). Weitere Dichtegesetze sind angegeben von G. H. Darwin, Poincaré, Lipschitz, Stieltjes, Stapff, Radau[2]). Alle aber stehen und fallen mit den Voraussetzungen, auf Grund deren sie aufgestellt sind, und die sind durchaus hypothetischer Natur. Wiechert äußert sich in seiner Abhandlung über die Massenverteilung im Innern der Erde über die Erklärbarkeit der Dichtezunahme durch wachsenden Druck folgendermaßen: »Die oft gemachte Annahme, bei der die Dichtevermehrung nach Innen zu als Folge des zunehmenden Druckes betrachtet wird, scheint mir nach allem, was wir über den molekularen Bau der

[1]) Wiechert u. Zöppritz, Über Erdbebenwellen. Gött. Nachr. 1907.

[2]) Näheres bei Günther, Handbuch der Geophysik u. Helmert, Math. u. physikal. Theorien der höh. Geodäsie.

Materie wissen, äußerst bedenklich. Wir müssen in den Molekülen sehr widerstandsfähige Dinge sehen, die in den festen Körpern schon unter gewöhnlichen Druckverhältnissen wegen der wechselseitigen Kräfte so enge aneinander liegen, daß eine erhebliche Kompression durch Druck nicht mehr stattfinden kann. Es scheint mir daher richtiger, die Dichteunterschiede in der Erde durch Materialverschiedenheiten zu erklären.«

In der Tat ist die Ansicht, die die Dichtevermehrung in Materialunterschieden sucht, einleuchtender; wird sie doch noch durch weitere Tatsachen wahrscheinlich gemacht. Wir wissen nämlich, daß Eisen, Nickel und andere Metalle in hervorragendem Maße an dem Aufbau des Sonnensystems beteiligt sind, wir wissen dies aus der Spektralanalyse, ferner zeigen es die auf die Erde stürzenden Meteoriten; es liegt daher der Schluß nahe, daß diese Metalle auch einen großen Teil der Bestandteile unserer Erde ausmachen. Dieser Schluß wird uns weiter durch die Tatsache nahegelegt, daß in gewissen Basalten Eisenkörner gefunden werden, und daß der Eisengehalt der Erde mit der Tiefe ständig wächst. Weiter ist durch Arbeiten von W. Thomson und G. H. Darwin nachgewiesen, daß die Erde bei Ebbe und Flut eine Starrheit zeigt, die der von Stahl etwa gleichkommt; zu dem gleichen Resultat ist O. Hecker gekommen, und ferner haben Hough, Herglotz, Schweydar, Rudzki und Brill aus anderen Tatsachen ebenfalls auf eine Starrheit ähnlich der des Stahls geschlossen[1]). Wenn wir demgemäß schließen, daß Metalle einen großen Teil des Erdkörpers ausmachen, so brauchen wir nicht mehr zu der Hypothese der Dichtevermehrung durch Druckzunahme zu greifen, da das höhere spezifische Gewicht dieser Metalle schon allein ausreicht, die von der Beobachtung geforderte höhere Dichte im Erdinnern zu erklären.

Als letztes und entscheidendes Argument diene folgendes: Wenn wir annehmen, daß die Dichtevermehrung durch Materialverschiedenheiten bedingt ist, so müssen wir von vornherein erwarten, daß die Dichteübergänge nicht stetig sind, sondern daß jähe Dichtesprünge vorhanden sind, und wir dürfen hoffen, daß diese sich in den Erdbebendiagrammen in irgendeiner Weise merklich machen. Das ist nun in der Tat der Fall; aus den Arbeiten des Göttinger Geophysikalischen Instituts folgt, daß im Innern mehrere solcher Dichtesprünge vorhanden sein müssen. Auf die Einzelheiten dieser Beobachtungen kommen wir noch zu sprechen. Nach dem Gesagten dürfen wir,

[1]) Trabert, Lehrb. d. kosm. Phys. S. 558.

wenn auch nicht als erwiesen, so doch als äußerst wahrscheinlich betrachten, daß die Ursache der Dichtevermehrung nach Innen zu in Materialunterschieden zu suchen ist, und daß die Druckzunahme dabei nur eine untergeordnete Rolle spielt.

§ 2. Temperatur und Druck im Erdinnern.

Versuche ergeben, daß die Temperatur mit der Tiefe wächst; so ergaben die Beobachtungen in zwei der tiefsten Bohrlöcher Deutschlands, dem von Sperenberg (1273 m) und dem von Schladebach bei Merseburg (1748,4 m), folgende Temperaturzunahme[1]):

Sperenberg		Schladebach	
Tiefe in m	Temperatur (Celsius)	Tiefe in m	Temperatur (Celsius)
26.7	9°	36	10.75°
223.0	21.6°	246	16.12°
286.7	23.5°	516	23.75°
350.4	26.4°	726	29.12°
414.1	26.9°	936	35.62°
477.8	30.9°	1116	40.25°
605.2	33.1°	1266	45.25°
669.0	35.9°	1356	48.50°
1080.0	46.5°	1446	51.12°
1268.6	48.1°	1536	53.12°
		1626	55.00°
		1716	56.62°

Im Mittel beträgt die geothermische Tiefenstufe, d. i. die Tiefendifferenz, bei der der Temperaturunterschied 1° C. beträgt, etwa 35 m. Da nun schon in 20—25 m Tiefe die Beeinflussung der Temperatur durch die von der Sonne kommenden Wärmestrahlen aufhört, so müssen wir auf eine im Innern der Erde vorhandene Wärmequelle schließen. Die Beobachtungen reichen bis 2000 m Tiefe; wie obige Tabelle zeigt, herrscht hier eine Temperatur von etwa 60°. Wie sich aber weiterhin die Temperatur ändert, darüber können wir nur etwas sehr Unbestimmtes aussagen. Ohne Zweifel muß die geothermische Tiefenstufe weiter mit wachsender Tiefe zunehmen; denn bliebe sie konstant, so ergäbe sich für den Erdmittelpunkt eine Temperatur

[1]) Mitgeteilt nach Credner, Elemente der Geologie S. 9.

von 182000° Celsius, was allen Theorien, die in dieser Hinsicht bisher aufgestellt worden sind, widerspricht. Als Forscher, die hierüber gearbeitet haben, sind zu nennen: W. Thomson, Naumann, Dunker und Hann.

W. Thomson kommt auf Grund von theoretischen Betrachtungen zu dem Resultat, daß die Temperatur zwar mit der Tiefe wächst, daß aber die Temperaturzunahme mit wachsender Tiefe immer geringer wird. Für 240 km Tiefe berechnet er eine Temperatur von 4000° Celsius, in größeren Tiefen ist sie nahezu konstant.

Ins Extreme geht Dunker; er leitete aus Beobachtungen eine Formel ab, nach der die Temperatur zunächst zunimmt, in etwa 1,6 km Tiefe mit 51° Celsius ein Maximum erreicht und von da ab wieder abnimmt. Später hat Dunker diese Formel jedoch wieder verworfen.

Hann fand auf Grund theoretischer Betrachtungen ebenfalls, daß die geothermische Tiefenstufe mit der Tiefe zunimmt.

Als Resultat aus allen theoretischen Versuchen können wir annehmen, daß die Temperatur in den obersten Schichten proportional mit der Tiefe wächst, daß aber in größeren Tiefen die Temperaturzunahme immer geringer wird.

Thiene[1]) gibt als untere Grenze für die Temperatur des Erdinnern 2000°, als obere Grenze 8000° Celsius an.

Auch auf die Ursache der Erdwärme sei kurz eingegangen. Es herrschen hierüber drei Theorien vor; nach der ersten war die Erde einst eine feurig-flüssige Masse, und die Erdwärme ist ein Rest dieser Hitze; nach der zweiten Theorie ist sie eine Folge der im Innern der Erde verlaufenden chemischen Prozesse, und nach einer neueren Theorie ist das Radium die Ursache derselben[1]).

Strutt hat gefunden, daß ein Gehalt von $0{,}175 \cdot 10^{-12}$ g Radium pro cm^3 der Erde hinreicht, um den Wärmeverlust durch Ausstrahlung zu decken. Nun enthalten die Gesteine aber bedeutend mehr Radium, etwa das 74fache des obigen Betrages. Strutt schließt daraus, daß nur die Schichten bis zu 72 km Tiefe Radium enthalten; demnach müßte die Temperatur auch nur bis zu dieser Tiefe wachsen, hier würde sie mit 1530° Celsius ihr Maximum erreichen, und von da ab bis zum Erdmittelpunkt bliebe sie konstant[2]).

Wir sehen, daß die verschiedenen Theorien in ihren Voraussetzungen und Folgerungen erheblich voneinander abweichen, und

[1]) Siehe Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Band III (Erdwärme).
[2]) Siehe Rudzki, Physik der Erde.

zusammenfassend können wir sagen, daß sichere Temperaturangaben über das Erdinnere auf Grund des heutigen Standes der Forschung noch nicht zu machen sind.

Zur Orientierung über den Druck im Erdinnern sei eine von Rudzki berechnete Tabelle angegeben[1]). Rudzki macht folgende Annahmen:

1) Die Druckverteilung folgt den Gesetzen der Hydrostatik,
2) Die Erde hat Kugelgestalt mit dem Radius $R = 6370$ km.,
3) Die Massenverteilung ist homogen. Für die Dichte setzt Rudzki 5,5. Für diese Werte erhält er folgende Tabelle:

Abstand vom Zentrum in Bruchteilen des Radius	Druck in Atmosphären (abgerundet)
0.00	1 694 854
0.10	1 678 106
0.20	1 627 060
0.30	1 542 317
0.40	1 423 678
0.50	1 271 141
0.60	1 084 707
0.70	864 376
0.80	610 148
0.90	322 023
0.95	165 249
0.99	33 729

Die Voraussetzung der Homogenität ist in Wirklichkeit aber nicht erfüllt. Daher gibt Rudzki eine zweite Tabelle an, die unter folgenden Voraussetzungen berechnet ist: Die obigen Annahmen 1) und 2) bleiben erhalten. An Stelle von 3) dagegen wird gesetzt: Die Kugel zerfällt in zwei homogene Teile, in einen Kern vom Radius $R/2$ und eine ihn umgebende Kugelschale von der Dicke $R/2$. Die Dichte der Schale beträgt die Hälfte der mittleren Dichte der Erde. So ergibt sich die Tabelle auf folgender Seite.

Als Erläuterung der Tabellen sagt Rudzki folgendes: „Man kann sagen, daß die erste Tabelle gewissermaßen die obere, die zweite die untere Grenze des Druckes zwischen 0,50 und 0,99 des Radius angibt. In den obersten Schichten weichen die Druckverhältnisse

[1]) Rudzki, Physik der Erde, S. 105.

Abstand vom Zentrum in Bruchteilen des Radius	Druck in Atmosphären (abgerundet)
0.50	1 165 200
0.60	836 080
0.70	579 140
0.80	364 400
0.90	166 800
0.95	85 930
0.99	16 390

schon zu sehr vom hydrostatischen Drucke ab, und obige Formeln verlieren ihre Geltung. Deshalb haben wir auch beide Tabellen bei $R = 0{,}99$ abgebrochen. Die obere Grenze des Druckes im Zentrum kann nicht angegeben werden, denn theoretisch kann der Druck daselbst einen unendlichen Wert erreichen, aber unter Annahme von nicht ganz unwahrscheinlichen Dichtegesetzen, wie z. B. denjenigen von Legendre und Laplace, bekommt man ungefähr drei Millionen Atmosphären.

Welche Eigenschaften die Stoffe unter Drucken von einigen Hunderttausenden von Atmosphären haben, wissen wir nicht, da keine Mittel existieren, solche Drucke in einem Laboratorium zu erzeugen. Es ist sehr wohl möglich, daß die Eigenschaften der Stoffe im Erdinnern in anderen Kombinationen als auf der Erdoberfläche auftreten, daß in gewissen Beziehungen die Stoffe sich wie feste Körper, in anderen wieder wie Flüssigkeiten verhalten. Nur so viel ist gewiß, daß alle Stoffe äußerst komprimiert, und daß infolge äußerster Verdichtung ihre Kompressionskoeffizienten äußerst gering sind."

§ 3. Über den Aggregatzustand im Innern der Erde.

Nachdem wir uns über die Temperatur- und Druckverhältnisse orientiert haben, wenden wir uns der Frage nach dem Aggregatzustand im Innern der Erde zu. Die Ansichten darüber gehen in drei Richtungen auseinander:

Am nächsten liegt es vielleicht, anzunehmen, daß die Temperatur, die in etwa 40 km Tiefe die Schmelztemperatur der Gesteine erreicht, auch weiterhin wächst, alle Substanzen in den flüssigen Zustand überführt, daß sie aber schließlich die kritische Temperatur der vorhandenen Substanzen überschreitet, oberhalb welcher die Substanzen

dann nur im Gaszustand existieren könnten. Den Kern würde also eine Gasmasse bilden, die allerdings durch hohen Druck äußerst verdichtet wäre. Diese Ansicht hat z. B. in S. Günther einen Vertreter gefunden.

Nach der zweiten Theorie kommt es infolge des hohen Druckes nicht zur Vergasung, und das Erdinnere befindet sich danach in glutflüssigem Zustande. Als Beweise für diese und die erste Theorie werden in der Regel zwei Tatsachen angeführt: die Tätigkeit der Vulkane und die Sphäroidgestalt der Erde.

Die dritte Theorie sieht das Innere der Erde im wesentlichen als fest an. Nach ihr existiert ein fester Kern, darüber ruht eine relativ dünne flüssige Magmaschicht, auf dieser wieder die feste Erdrinde. Vertreter dieser Ansicht ist Wiechert; die Ursache der Verfestigung sucht er im steigenden Druck, der schließlich so groß wird, „daß er die Moleküle so enge aneinander preßt, daß sie trotz der steigenden Temperatur die gegenseitige Beweglichkeit völlig verlieren.“[1]) Den Übergang von den flüssigen Schichten zum festen Erdkörper brauchen wir uns nach Wiechert nicht notwendig als einen sprunghaften vorzustellen, wir dürfen vielmehr annehmen, daß er stetig erfolgt. Infolge des steigenden Druckes werden die Moleküle dichter und dichter aneinander gepreßt: die Substanz wird zähflüssig, um schließlich in den vollkommen festen Aggregatzustand überzugehen. Um diese Möglichkeit plausibel zu machen, führt Wiechert mehrere Beispiele an, die hier auch wiedergegeben seien[2]). Paraffinöl, Pech und Glas erscheinen bei gewöhnlicher Temperatur als feste Körper; bei wachsender Temperatur dagegen werden sie zunächst zähflüssig, dann leichtflüssig. Wir sehen also, daß hier die Änderung einer der Zustandsgrößen, nämlich der Temperatur, eine allmähliche Änderung des Aggregatzustandes zur Folge hat. Für das Innere der Erde würde die die Änderung des Aggregatzustandes hervorrufende Zustandsgröße der zunehmende Druck sein. Das Pech bietet uns vielleicht das beste Beispiel für das Verhalten des festen Erdinnern einwirkenden Kräften gegenüber: Gegen kurzandauernde Kräfte verhält es sich ganz als fester Körper, genügend lange andauernden Kräften gegenüber dagegen gibt es vollkommen nach, es zeigt hier ganz die Eigenschaften der Flüssigkeiten. Wiechert sei wieder selbst zitiert: „In allen diesen Fällen zeigt uns das bequem

---

[1]) E. Wiechert, Über die Massenverteilung im Innern der Erde, § 10.

[2]) Wiechert u. Zöppritz, Über Erdbebenwellen, § 2.

zu handhabende Mittel der Temperaturänderung, wie mit einer Auflockerung der Moleküle eine Verminderung, mit einer Verdichtung eine Vermehrung der Zähigkeit verbunden ist. Wir werden erwarten dürfen, daß das zweite Mittel, die Druckvermehrung, das unseren menschlichen Beobachtungen freilich in viel geringfügigerem Umfang zur Verfügung steht, in entsprechender Weise wirken wird." [1]). Zum Verständnis des letzteren sei hinzugefügt, daß es mit künstlichen Mitteln nur gelungen ist, Drucke bis etwa zu 20 000 Atmosphären herzustellen, während, wie wir im § 2 sahen, die im Innern der Erde herrschenden Drucke sich nach Hunderttausenden von Atmosphären bemessen.

Vergleichen wir nun die drei Theorien, inwieweit sie den vorliegenden Beobachtungen gerecht werden. Bedenken wir die Tatsache der Ebbe und Flut, bedenken wir ferner, daß nach den Arbeiten von W. Thomson und G. H. Darwin der Erde eine Starrheit ähnlich der des Stahls zugeschrieben werden muß, daß ferner alle weiteren Versuche in dieser Richtung eine Starrheit ergaben, die eher über als unter der des Stahls liegen, so müssen wir zu dem Schluß kommen, daß die Theorie des festen Erdkernes der Wahrheit am nächsten kommt.

Ein Einwand könnte noch von der theoretischen Seite her gegen die Theorie vom festen Erdinnern gemacht werden, nämlich daß es bei der hohen Temperatur wahrscheinlich ist, daß sich alle Stoffe in überkritischem Zustande befinden, und daß schon aus diesem Grunde die Annahme des Gaszustandes unbedingt erforderlich sei. Diesem Einwurf gegenüber hören wir Wiechert wieder am besten selbst: „Demgegenüber ist zu sagen, daß die physikalischen Erfahrungen durchaus nicht zu diesen Schlüssen berechtigen. Die sog. kritische Temperatur hat gewiß eine große Bedeutung, aber man verkennt diese völlig, wenn man annimmt, es handele sich um eine allumfassende einschneidende Grenze für den betreffenden Stoff. Davon ist nicht die Rede, die kritische Temperatur bezieht sich stets nur auf eine einzige besondere Art der Zustandsänderung des Stoffes. Fassen wir z. B. die Verdampfung des Wassers zu Wasserdampf ins Auge. Wird die Temperatur, bei welcher die Wasserverdampfung untersucht wird, mehr und mehr erhöht, so nimmt die Dichte des verdampfenden Wassers mehr und mehr ab, die Dichte des gesättigten Dampfes wächst höher und höher an; schließlich, bei

[1]) Wiechert u. Zöppritz, Über Erdbebenwellen, § 2.

der ‚kritischen Temperatur', verschwindet die Dichtedifferenz überhaupt; darüber hinaus fällt der Sprung der ‚Verdampfung' in der Zustandsänderung fort, indem sich nun dort, wo unterhalb der kritischen Temperatur bei Drucksteigerung eine unstetige Änderung einstellte, eine ständige Folge von Änderungen aneinanderreiht. Damit ist die Bedeutung der kritischen Temperatur dargelegt, damit ist sie aber auch völlig erschöpft. Wir haben nicht den mindesten Anlaß, zu vermuten, daß auch beliebig weit über der kritischen Temperatur die Zustandsänderungen bei steigendem Druck nicht zu immer großer Zähheit und schließlich zu beliebig größerer Riegheit (elastische Widerstandsfähigkeit gegen Formveränderungen) führen, und es gibt auch keinen Grund, nach dem selbst sprunghafte Zustandsänderungen an anderen Stellen der ganzen Reihe ausgeschlossen sein sollten." [1])

§ 4. Inhaltsangabe der Wiechertschen Arbeit über die „Massenverteilung im Innern der Erde."

Eine Arbeit, welche ähnliche Ziele verfolgt wie die vorliegende, ist die bereits erwähnte Wiechertsche Abhandlung: „Über die Massenverteilung im Innern der Erde." Der Inhalt derselben sei daher kurz angegeben.

Wie schon hervorgehoben, geht Verfasser von der Annahme aus, daß die Dichteverschiedenheiten in den einzelnen Schichten der Erde durch Materialunterschiede bedingt seien; da von Substanzen, deren Dichte über 5,5 liegt, nur Metalle in Betracht kommen und insbesondere aus geologischen und kosmischen Gründen erwartet werden muß, daß Eisen in starkem Maße an dem Aufbau unseres Planeten beteiligt ist, so wird angenommen, daß die Erde aus einem Eisenkern und einer darüber lagernden Gesteinsschicht, dem Mantel, bestehe. Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Dichte von Kern und Mantel durchweg konstant gesetzt. Die zur Rechnung benutzten Gleichungen beruhen auf der Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts, d. h. daß Oberfläche und Kern der Erde unter dem Einfluß von Gravitation und Zentrifugalkraft diejenigen Gestalten annehmen, welche sie annehmen würden, wenn die ganze Erde flüssig wäre. Als bekannt werden bei der folgenden Rechnung vorausgesetzt die mittlere Dichte der Erde, die Dichte des Gesteinsmantels und die Abplattung der Erde. Jedem Wert für die Dichte des Kerns

[1]) Wiechert u. Zöppritz, Über Erdbebenwellen, § 2.

ordnet sich ein Wert für seine Dimensionen und ein Wert der Abplattung der Erde zu. Da diese nun aber aus anderen Tatsachen bekannt ist, so erhalten wir als Resultat dieser Rechnung Aufschluß über Dichte und Größe des Kerns. Als Wert für seine Dichte ergibt sich die des komprimierten Eisens. Für die Dicke des Mantels ergibt sich ein Wert zwischen 1200 und 1600 km, sie beträgt also etwa ein Fünftel des Erdradius.

Bei Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung in der Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen erhält man Auskunft über die Abweichungen der Erdgestalt von der Ellipsoidgestalt. Bei Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts für den Mantel ergibt sich, daß die größte Abweichung nur sehr gering ist: sie beträgt etwa $2^1/_2$ m; für den Kern würde sich ein noch kleinerer Wert ergeben. Der Vergleich zwischen Abplattung der Erde und Präzession und Nutation zeigt, daß der Fall einer merklichen Abweichung vom hydrostatischen Gleichgewicht für den Kern immerhin möglich ist. Unter dieser Annahme ergibt sich für den Kern, daß der maximale Höhenunterschied zwischen seiner Oberfläche und der der entsprechenden Niveaufläche der Schwere mehrere Hunderte von Metern betragen kann.

§ 5. Die neuesten Ergebnisse der Erdbebenforschung in bezug auf das Innere der Erde. Problemstellung.

Um die Rechnung möglichst einfach zu gestalten, nahm Wiechert an, daß die Dichte des Kerns durchweg konstant sei; nun aber haben neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Erdbebenforschung[1]) gezeigt, daß das nicht der Fall ist, daß vielmehr mehrere Dichtesprünge im Innern der Erde vorhanden sind. Durch Arbeiten von Geiger und Gutenberg ergaben sich Unstetigkeitsflächen in den Tiefen von

1193 km
1712 „
2454 „

Diese Werte wurden durch Beobachtungen an Longitudinalwellen gefunden und durch Beobachtungen an Transversalwellen gut bestätigt. Unter anderem ist es nun der Zweck der vorliegenden Arbeit, die Dichte der einzelnen Schichten zu berechnen, da sich aber die Unstetigkeitsfläche in 1712 km Tiefe nur als eine sehr schwache

[1]) Geiger u. Gutenberg, Über Erdbebenwellen, Gött. Nachr. 1912.

andeutet und um die Rechnung nicht allzu kompliziert zu gestalten, wird jene außer acht gelassen und nur die Unstetigkeitsflächen in 1193 und 2454 km Tiefe berücksichtigt werden. Den Hauptwert müssen wir auf die Ermittlung der Dichte des jetzt enger begrenzten Kernes legen; die beiden über ihm lagernden Schichten werden wir als eine einzige betrachten; wir können erwarten, daß die Rechnung uns die mittlere Dichte der beiden Schichten liefert. Weiterhin wollen wir die Abplattung von Kern und Mittelschicht, wie die inneren Schichten künftighin genannt sein mögen, berechnen und schließlich ihre Abweichungen von der Ellipsoidgestalt.

§ 6. Über das hydrostatische Gleichgewicht.

Wir werden für die ganze folgende Rechnung die Annahme zugrundelegen, daß in allen Schichten der Erde hydrostatisches Gleichgewicht herrscht. Es mögen daher der Frage einige Worte gewidmet werden, woraus wir die Berechtigung für diese Annahme ableiten können.

Wir wollen die Frage für die Erdrinde und den festen Teil des Erdkörpers gesondert behandeln. Nach Wiechert erscheint es geboten, für die Erdrinde hydrostatisches Gleichgewicht anzunehmen. Er sagt darüber folgendes: „Bekanntlich variiert nach dem Ausweis des Pendels die Masse der Erdrinde keineswegs entsprechend den sichtbaren Hebungen und Senkungen der festen Erdoberfläche, sondern scheint — wenn man sich die lokalen Unebenheiten ausgeglichen denkt — nur wenig abhängig von der äußeren Begrenzung. Bedenkt man nun, daß im Laufe der Zeiten Schichten von vielen Kilometern Dicke der Erdoberfläche teils aufgelagert, teils entführt worden sind, so muß geschlossen werden, daß bei der Ausbildung der heutigen Verhältnisse unter der festen Erdrinde eine plastische Unterlage vorhanden war, auf der die Rinde schwimmend ruhte, so daß die Massenumlagerungen sich durch Hebungen und Senkungen der Erdrinde wieder ausgleichen konnten — als Material der plastischen Unterlage werden wir feurig-flüssige Gesteine betrachten müssen“ [1]). Da das Wasser auch heute noch Massenumlagerungen unterhält, so ist anzunehmen, daß die flüssige Gesteinsschicht unter der festen Erdrinde auch heute noch existiert. Die Annahme einer solchen entkräftet zugleich die Einwände, die gegen die Hypothese vom festen Erdinnern erhoben werden: daß die Erde Sphäroidgestalt, d. i. die Ge-

[1]) Wiechert, Über die Massenverteilung im Innern der Erde, § 10.

stalt einer rotierenden Flüssigkeit habe, weiter, daß es erwiesen sei, daß die feste Erdrinde den fluterzeugenden Kräften nachgibt. Die Annahme der flüssigen Gesteinsschicht unter der festen Erdrinde wird außerdem durch seismographische Untersuchungen und durch die Tätigkeit der Vulkane nahegelegt. Nur müssen wir, um mit den Versuchen über die Starrheit der Erde nicht in Widerspruch zu kommen, annehmen, daß sie sehr zähflüssig und sehr dünn ist. Während Wiechert also für die Erdrinde hydrostatisches Gleichgewicht voraussetzt, nimmt er für den Kern andre Verhältnisse als möglich an, und zwar auf Grund der Rechnungen über die Starrheit der Erde und insbesondere auf Grund folgender Tatsache: Unter der Voraussetzung, daß im Innern hydrostatisches Gleichgewicht herrscht, ergibt die Theorie eine Beziehung zwischen $\frac{C-A}{C}$ und e, wobei C das Trägheitsmoment der Erde in bezug auf die Rotationsachse, A dasselbe in bezug auf eine zur Rotationsachse senkrecht stehende Achse und e die Abplattung der Erde bedeutet. Es ergibt sich nun, daß sich unter anderem die Werte 1/306.5 und 1/298 für $\frac{C-A}{C}$ und e entsprechen müssen, wenn die Voraussetzung des hydrostatischen Gleichgewichts erfüllt ist. Diese Größen sind nun aber auch durch die Beobachtung bestimmbar: $\frac{C-A}{C}$ aus Präzession und Nutation, e aus geodätischen Messungen, Schwerkraftbeobachtungen und aus den Störungen der Mondbahn infolge der Abweichung der Erdgestalt von der Kugelgestalt. Für $\frac{C-A}{C}$ erhalten wir den Wert $\frac{1}{306.5}$. Im Jahre 1897, zur Zeit also, als Wiechert jene Arbeit verfaßte, hielt man nicht $\frac{1}{298}$ für den besten Wert von e, man nahm vielmehr an, daß die Abplattung ein wenig größer sei. Wiechert betont allerdings auch damals schon, „daß die Beobachtungen mit vollständigem Gleichgewicht verträglich seien.“ Und nach neueren Beobachtungen müssen wir in der Tat $\frac{1}{298}$ für den besten Wert von e halten. Auf Grund dieser Tatsache dürfen wir also die Hypothese des hydrostatischen Gleichgewichts auf das ganze Erdinnere ausdehnen.

Es könnte wieder ein Einwand gemacht werden, daß nämlich dieser Annahme die obigen Versuche über die Starrheit der Erde widersprächen. Die Voraussetzung des hydrostatischen Gleichgewichts

besage nichts weiter, als daß die Erde den einwirkenden Kräften nachgebe, während die Voraussetzung der Starrheit doch gerade das Gegenteil behaupte. Demgegenüber ist auf die Ausführungen des § 3 hinzuweisen. Dort führten wir als Beispiel für das Verhalten des festen Teiles des Erdkörpers das Pech an, welches durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet ist: Starrheit kurz andauernden Kräften gegenüber; dagegen vollkommene Nachgiebigkeit bei genügend lange andauernden Kräften; und die gleichen Eigenschaften müssen wir dem Erdinnern zuschreiben. Doch darüber sei wieder Wiechert selbst zitiert: „Sehr wichtig scheint es, an den Beispielen des Pechs und der Gläser zu beachten, wie ein und derselbe Stoff schneller wechselnden Kräften gegenüber als sehr riege erscheinen kann, während er lange andauernden Kräften gegenüber durchaus das Verhalten einer Flüssigkeit annimmt. Sehr wahrscheinlich bietet uns die Erde im Ganzen oder wenigstens mit ihrer Rinde einen ähnlichen Fall, indem sie sich gegenüber den bei Erdbeben im Laufe von Sekunden oder Minuten, bei der Ebbe und Flut im Laufe von Stunden oder Tagen, bei den Polschwankungen im Laufe von Monaten variierenden Kräften als sehr riege erweist und dennoch nachgiebig wie eine Flüssigkeit ist gegenüber den in Jahrtausenden oder gar Millionen variierenden Kräften infolge von geologischen Umgestaltungen oder von kosmischen Änderungen ihrer Rotationsgeschwindigkeit“ [1]).

§ 7. Bezeichnungen.

Nachdem wir uns über die Vorstellungen, die wir uns vom Erdinnern bilden müssen, orientiert haben, können wir zur Erledigung der in § 5 angegebenen Aufgabe schreiten. Es seien zunächst die Bezeichnungen angegeben: Es bezeichnet a den äquatorialen Halbmesser des Mantels; a' den der Mittelschicht, a'' den des Kerns, α, α', α'' bezw. den der entsprechenden Ellipsoide. b, b', b'' und β, β', β'' mögen die entsprechende Bedeutung für die polare Achse haben. e, e', e'' bezeichne die den drei Oberflächen zukommenden Abplattungen, ε, ε', ε'' habe die gleiche Bedeutung für die drei Ellipsoide, Q, Q', Q'' bezeichne bezw. die größte Erhebung der Oberflächen über die ihnen entsprechenden Ellipsoide. Wir fassen die Oberflächen von Mantel, Mittelschicht und Kern auf als die Oberflächen von Rotationsellipsoiden, die gemäß einer Kugelfunktion 4. Ordnung deformiert sind. Bezeichnen wir mit ϱ den Radiusvektor

[1]) Wiechert u. Zöppritz, Über Erdbebenwellen. Göttinger Ber. 1907. § 2.

nach der Oberfläche des Ellipsoids, mit r den nach dem entsprechenden Punkte der deformierten Fläche und mit $P^{(4)}(\cos\vartheta)$ die Kugelfunktion 4. Ordnung $\frac{35}{8}\left(\cos^4\vartheta - \frac{6}{7}\cos^2\vartheta + \frac{3}{35}\right)$, so bestehen folgende Beziehungen $\varrho = \alpha\left(1 - \varepsilon\cos^2\vartheta - \frac{3}{8}\varepsilon^2\sin^2(2\vartheta)\right)$

$$r = \varrho + Q\,P^{(4)}(\cos\vartheta).$$

ϑ ist hierbei der geozentrische Polabstand. Mit δ, δ', δ'' mögen die Dichten von Mantel, Mittelschicht und Kern bezeichnet werden. δ_m sei die mittlere Dichte der Erde, δ'_m die mittlere Dichte von Kern und Mittelschicht. Γ sei die Masse der Erde, T ihre Rotationsdauer, und $\varkappa$ bezeichne die Gravitationskonstante; g_a sei der Wert der Fallbeschleunigung am Äquator, g_{45} der unter 45° Breite, g_p der am Pol; g_a^* bezeichne die Beschleunigung wegen der Rotation in der Oberfläche am Äquator.

§ 8. Numerische Werte.

Als bekannt werden vorausgesetzt:

1. der Radius des dem Mantel entsprechenden Ellipsoids: α
2. der Radius des der Mittelschicht entsprechenden Ellipsoids: α'
3. der Radius des dem Kern entsprechenden Ellipsoids: α''
4. die mittlere Dichte der Erde: δ_m
5. die Dichte des Mantels: δ
6. die Rotationsdauer: T
7. die Gravitationskonstante: $\varkappa$
8. die Abplattung des Mantels: e
9. die Fallbeschleunigung am Äquator: g_a.

Für diese Größen werden folgende Zahlenwerte angenommen:

$\alpha = 6\,378\,200$ m
$\alpha' = 5\,185\,200$ „
$\alpha'' = 3\,924\,200$ „
$\delta_m = 5.53$
$\delta = 3.4$; jedoch werden auch die Werte
$\delta = 3.0$ und $\delta = 3.2$ und $\delta = 3.6$ berücksichtigt.
$T = 86\,164.1$ sec.
$\varkappa = 6.66 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm^3\ g^{-1}\ sec^2}$
$e = \frac{1}{298}$
$g_a = 978.030.$

§ 9. Gang der Rechnung. Aufstellung der Formeln. Die zu beachtende Genauigkeit.

Es bleiben zur Berechnung folgende Unbekannte:

1. die Dichte der Mittelschicht δ',
2. die Dichte des Kerns δ'',
3. die Abplattung des der Mittelschicht entsprechenden Ellipsoids: ε',
4. die Abplattung des dem Kern entsprechenden Ellipsoids ε'',
5. die maximale Abweichung der Oberfläche des Mantels von dem zugehörigen Ellipsoid: Q,
6. die entsprechende Größe für die Mittelschicht: Q',
7. die entsprechende Größe für den Kern: Q''.

Das sind insgesamt sieben Unbekannte; zur Lösung der Aufgabe haben wir also sieben Gleichungen aufzustellen. Der Hauptwert ist auf die Ermittlung von δ' und δ'' zu legen.

Es mögen noch einige allgemeine Bemerkungen über den Gang der Rechnung eingeschaltet werden. Gemäß der Voraussetzung des hydrostatischen Gleichgewichts werden wir von der Annahme ausgehen, daß die Oberflächen von Mantel, Mittelschicht und Kern Äquipotentialflächen der Schwere sind. Diese Annahme wird uns die zur Rechnung nötigen Formeln liefern. Es wird nicht möglich sein, die Unbekannten explizit durch bekannte Größen darzustellen: als nächstliegender Weg zur Lösung erscheint daher der, für die Unbekannten bestimmte Werte einzusetzen, zu probieren, ob sie allen sieben Gleichungen genügen, und durch Interpolation allmählich zu immer besseren Werten zu gelangen. Es ist ersichtlich, daß dies Verfahren sehr umständlich ist. Es wurde daher ein anderer Weg eingeschlagen. Wie bereits erwähnt, ist der Hauptwert auf die Ermittlung von δ' und δ'' zu legen, schließlich auch noch auf die von ε' und ε''; Q, Q', Q'' spielen dagegen eine untergeordnete Rolle, und die Nichtberücksichtigung dieser Größen wird das Resultat, das für die anderen vier Unbekannten gefunden wird, auch nur in sehr geringem Maße beeinflussen; daher wurden Q, Q', Q'' zunächst $= 0$ gesetzt; ferner wurden bei dieser vorläufigen Rechnung auch die zweiten und höheren Potenzen von ε, ε', ε'' vernachlässigt. Es wurde also zunächst die Rechnung unter Vernachlässigung aller Glieder 4. Ordnung durchgeführt. Es ergibt sich dann der große Vorteil, daß es gelingt, die übrigbleibenden vier Unbekannten δ', δ'', ε', ε'' durch bekannte Größen explizit auszudrücken. Um nun nicht für

die Rechnungen zweiter und vierter Ordnung gesondert Ausgangsformeln aufstellen zu müssen, wurden von vornherein die Formeln für die Rechnung vierter Ordnung aufgestellt; in diesen wurden dann die Glieder vierter Ordnung vernachlässigt; dadurch ergaben sich vier neue Gleichungen, durch die sich die vier Unbekannten explizit darstellen lassen. Die sich aus diesen vier Gleichungen ergebenden Werte wurden dann in die Gleichungen, in denen die Glieder vierter Ordnung nicht vernachlässigt waren, eingesetzt, und durch ein unten anzugebendes Verfahren gelang es dann, die Verbesserungen anzugeben, deren die Werte, die sich aus der Rechnung für die zweite Ordnung ergeben hatten, bedurften, um auch den Gleichungen vierter Ordnung zu genügen; auf diesem Wege gelangen wir auch zur Kenntnis von Q, Q' und Q''.

Es mögen jetzt also die Ausgangsformeln unter Mitberücksichtigung der Glieder vierter Ordnung aufgestellt werden.

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Erde als Superposition von drei homogenen Körpern mit den Dichten δ, $\delta' - \delta$, $\delta'' - \delta'$, die bzw. von den Oberflächen des Mantels, der Mittelschicht und des Kerns begrenzt werden. Die Masse zwischen der Oberfläche jedes der drei Körper und der des zugehörigen Ellipsoides denken wir uns zu einer unendlich dünnen Schicht vierter Ordnung verdichtet und diese zu einer Kugelfläche deformiert. Auf das Endresultat der Rechnung wird dies keinen merklichen Einfluß haben.

Das Gravitationspotential, das von einem homogenen Ellipsoid ε, α, δ verursacht wird, ist in einem außerhalb gelegenen Punkte[1]:

$$\varphi = -\frac{4}{3}\varkappa\pi\alpha^3(1-\varepsilon)\delta\frac{1}{R}\left\{1-\frac{2}{5}\varepsilon\frac{\alpha^2}{R^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)P^{(2)}(\cos\vartheta) + \frac{12}{35}\varepsilon^2\frac{\alpha^4}{R^4}P^{(4)}(\cos\vartheta)\right\},$$

in einem Punkte innerhalb:

$$\varphi = -\varkappa\pi\delta\left\{\text{const.} - \frac{2}{3}R^2 - \left(\frac{8}{15}\cdot\varepsilon + \frac{12}{35}\varepsilon^2\right)R^2P^{(2)}(\cos\vartheta)\right\},$$

wobei $P^{(2)}(\cos\vartheta)$ und $P^{(4)}(\cos\vartheta)$ die Kugelfunktionen zweiter und vierter Ordnung bedeuten:

$$P^{(2)}(\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)$$

$$P^{(4)}(\cos\vartheta) = \frac{35}{8}\left(\cos^4\vartheta - \frac{6}{7}\cos^2\vartheta + \frac{3}{35}\right).$$

---

[1] Z. B. Wiechert, Über die Massenverteilung im Innern der Erde. § 2.

Das Potential, das von einer unendlich dünnen Schicht von der in Betracht kommenden Art verursacht wird, ist in einem Punkte außerhalb der Kugel:

$$\varphi = -\frac{4}{9}\varkappa\pi\alpha^3\delta\frac{Q}{\alpha}\frac{\alpha^4}{R^5}P^{(4)}(\cos\vartheta),$$

in einem Punkte innerhalb der Kugel:

$$\varphi = -\frac{4}{9}\varkappa\pi\alpha^3\delta\frac{Q}{\alpha}\frac{R^4}{\alpha^5}P^{(4)}(\cos\vartheta).$$

R ist der Abstand des Punktes, in dem das Potential untersucht wird, vom Mittelpunkte des Ellipsoids bzw. der Kugelschicht.

Das Potential im Innern des Mantels ergibt sich durch Superposition von sechs Potentialen; die Bestandteile sind folgende:

1. Potential für das Innere des homogenen Ellipsoides $\varepsilon,\ \alpha,\ \delta$,
2. Potential für das Äußere des homogenen Ellipsoides $\varepsilon',\ \alpha',\ \delta'-\delta$,
3. Potential für das Äußere des homogenen Ellipsoides $\varepsilon'',\ \alpha'',\ \delta''-\delta'$,
4. Potential für das Innere der Schicht $\alpha,\ Q,\ \delta$,
5. „ „ „ Äußere „ „ $\alpha',\ Q',\ \delta'-\delta$,
6. „ „ „ „ „ „ $\alpha'',\ Q'',\ \delta''-\delta'$.

Ebenso ergibt sich das Potential für einen Punkt im Innern der Mittelschicht durch Superposition folgender Potentiale:

1. Potential für das Innere des homogenen Ellipsoides $\varepsilon,\ \alpha,\ \delta$,
2. Potential für das Innere des homogenen Ellipsoides $\varepsilon',\ \alpha',\ \delta'-\delta$.
3. Potential für das Äußere des homogenen Ellipsoides $\varepsilon'',\ \alpha'',\ \delta''-\delta'$,
4. Potential für das Innere der Schicht $\alpha,\ Q,\ \delta$,
5. „ „ „ „ „ „ $\alpha',\ Q',\ \delta'-\delta$,
6. „ „ „ Äußere „ „ $\alpha'',\ Q'',\ \delta''-\delta'$,

und das Potential für das Innere des Kerns ist aus folgenden Potentialen zusammengesetzt:

1. Potential für das Innere des homogenen Ellipsoides $\varepsilon,\ \alpha,\ \delta$,
2. Potential für das Innere des homogenen Ellipsoides $\varepsilon',\ \alpha',\ \delta'-\delta$,

3. Potential für das Innere des homogenen Ellipsoides ε'', α'', $\delta'' - \delta'$,
4. Potential für das Innere der Schicht α, Q, δ,
5. „ „ „ „ „ „ α', Q', $\delta' - \delta$,
6. „ „ „ „ „ „ α'', Q'', $\delta'' - \delta'$.

Wir erhalten durch Anwendung der angegebenen Formeln folgende drei Gleichungen, die künftighin als Gleichungen I, II und III zitiert werden mögen:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi = \text{const.} &+ \varkappa\pi\alpha^2\Big\{\frac{2}{3}\,\delta + \delta\Big(\frac{8}{15}\,\varepsilon + \frac{12}{35}\,\varepsilon^2\Big)P^{(2)}(\cos\vartheta) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\Big(\frac{2\pi}{T}\Big)^2(1-\cos^2\vartheta)\Big\}\frac{R^2}{\alpha^2} \\
&- \frac{4}{9}\,\varkappa\pi\alpha^2\delta\,\frac{Q}{\alpha}\,\frac{R^4}{\alpha^4}\cdot P^{(1)}(\cos\vartheta) - \frac{4}{3}\,\varkappa\pi\Big\{\alpha'^2(1-\varepsilon')(\delta'-\delta)\cdot\frac{\alpha'}{\alpha} \\
&\qquad + \alpha''^2(1-\varepsilon'')(\delta''-\delta')\,\frac{\alpha''}{\alpha}\Big\}\cdot\frac{\alpha}{R} \\
&+ \frac{8}{15}\,\varkappa\pi\Big\{\alpha'^2\Big(\frac{\alpha'}{\alpha}\Big)^3(\delta'-\delta)\,\varepsilon'(1-\varepsilon')\Big(1-\frac{\varepsilon'}{2}\Big) \\
&\qquad + \alpha''^2\Big(\frac{\alpha''}{\alpha}\Big)^3(\delta''-\delta')\,\varepsilon''(1-\varepsilon'')\Big(1-\frac{\varepsilon''}{2}\Big)\Big\}\frac{\alpha^3}{R^3}\cdot P^{(2)}(\cos\vartheta) \\
&- \frac{4}{3}\,\varkappa\pi\Big\{\frac{12}{35}\,\alpha'^2\Big(\frac{\alpha'}{\alpha}\Big)^5(\delta'-\delta)\,\varepsilon'^2(1-\varepsilon') + \frac{12}{35}\,\alpha''^2\Big(\frac{\alpha''}{\alpha}\Big)^5(\delta''-\delta')\,\varepsilon''^2(1-\varepsilon'') \\
&+ \frac{1}{3}\,\alpha'^2\Big(\frac{\alpha'}{\alpha}\Big)^5(\delta'-\delta)\,\frac{Q'}{\alpha'} + \frac{1}{3}\,\alpha''^2\Big(\frac{\alpha''}{\alpha}\Big)^5(\delta''-\delta')\,\frac{Q''}{\alpha''}\Big\}\frac{\alpha^5}{R^5}P^{(4)}(\cos\vartheta)
\end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi = \text{const.} &+ \frac{2}{3}\,\varkappa\pi\alpha'^2\delta'\cdot\frac{R^2}{\alpha'^2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{2\pi}{T}\Big)^2R^2(1-\cos^2\vartheta) \\
&+ \varkappa\pi\alpha'^2\Big\{\delta\Big(\frac{8}{15}\,\varepsilon + \frac{12}{35}\,\varepsilon^2\Big) + (\delta'-\delta)\Big(\frac{8}{15}\,\varepsilon' + \frac{12}{35}\,\varepsilon'^2\Big)\Big\}\frac{R^2}{\alpha'^2}P^{(2)}(\cos\vartheta) \\
&- \frac{4}{9}\,\varkappa\pi\alpha'^2\Big\{\Big(\frac{\alpha'}{\alpha}\Big)^2\delta\,\frac{Q}{\alpha} + (\delta'-\delta)\,\frac{Q'}{\alpha'}\Big\}\frac{R^4}{\alpha'^4}P^{(4)}(\cos\vartheta)\,, \\
&- \frac{4}{3}\,\varkappa\pi\alpha''^2(1-\varepsilon'')(\delta''-\delta')\Big\{\frac{\alpha'}{R}\cdot\frac{\alpha''}{\alpha'} \\
&\qquad - \frac{2}{5}\,\varepsilon''\Big(\frac{\alpha'}{R}\Big)^3\Big(\frac{\alpha''}{\alpha'}\Big)^3\Big(1-\frac{\varepsilon''}{2}\Big)P^{(2)}(\cos\vartheta) + \frac{12}{35}\,\varepsilon''^2\Big(\frac{\alpha'}{R}\Big)^5\cdot\Big(\frac{\alpha''}{\alpha'}\Big)^5P^{(4)}(\cos\vartheta)\Big\} \\
&- \frac{4}{9}\,\varkappa\pi\alpha''^2(\delta''-\delta')\,\frac{Q''}{\alpha''}\cdot\Big(\frac{\alpha'}{R}\Big)^5\cdot\Big(\frac{\alpha''}{\alpha'}\Big)^5P^{(4)}(\cos\vartheta)
\end{aligned}\right\}\ \text{II.}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \text{const.} &+ \frac{2}{3}\varkappa\pi\alpha''^2\delta''\cdot\frac{R^2}{\alpha''^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^2(1-\cos^2\vartheta)\\ &+ \varkappa\pi\alpha''^2\cdot\left\{\delta\left(\frac{8}{15}\varepsilon+\frac{12}{35}\varepsilon^2\right)+(\delta'-\delta)\left(\frac{8}{15}\varepsilon'+\frac{12}{35}\varepsilon'^2\right)\right.\\ &\left.+(\delta''-\delta')\left(\frac{8}{15}\varepsilon''+\frac{12}{35}\varepsilon''^2\right)\right\}\frac{R^2}{\alpha''^2}P^{(2)}(\cos\vartheta)\\ -\frac{4}{9}\varkappa\pi\alpha''^2&\left\{\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^2\delta\frac{Q}{\alpha}+\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2(\delta'-\delta)\frac{Q'}{\alpha'}+(\delta''-\delta')\frac{Q''}{\alpha''}\right\}\frac{R^4}{\alpha''^4}\cdot P^{(4)}(\cos\vartheta).\end{aligned}\right\}\text{ III.}$$

In diesen Ausdrücken setzen wir bzw. auf Grund der Formeln

$$\varrho = \alpha\left(1-\varepsilon\cos^2\vartheta-\frac{3}{8}\sin^2(2\vartheta)\right)$$
$$r = \varrho + Q\,P^{(4)}(\cos\vartheta)$$

$$\frac{R}{\alpha} = 1-\varepsilon\cos^2\vartheta-\frac{3}{8}\varepsilon^2\sin^2(2\vartheta)+\frac{Q}{\alpha}P^{(4)}(\cos\vartheta)$$
$$\frac{R}{\alpha'} = 1-\varepsilon'\cos^2\vartheta-\frac{3}{8}\varepsilon'^2\sin^2(2\vartheta)+\frac{Q'}{\alpha'}P^{(4)}(\cos\vartheta)$$
$$\frac{R}{\alpha''} = 1-\varepsilon''\cos^2\vartheta-\frac{3}{8}\varepsilon''^2\sin^2(2\vartheta)+\frac{Q''}{\alpha''}P^{(4)}(\cos\vartheta).$$

Es seien die Potenzen von $\frac{R}{\alpha}$, welche in Betracht kommen, angegeben:

$$\left(\frac{R}{\alpha}\right)^2 = 1+\frac{3}{4}\frac{Q}{\alpha}-\left(2\varepsilon+3\varepsilon^2+\frac{15}{2}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^2\vartheta+\left(4\varepsilon^2+\frac{35}{4}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^4\vartheta$$
$$\left(\frac{R}{\alpha}\right)^4 = 1+\frac{3}{2}\frac{Q}{\alpha}-\left(4\varepsilon+6\varepsilon^2+15\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^2\vartheta+\left(12\varepsilon^2+\frac{35}{2}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^4\vartheta$$
$$\frac{\alpha}{R} = 1-\frac{3}{8}\frac{Q}{\alpha}+\left(\varepsilon+\frac{3}{2}\varepsilon^2+\frac{15}{4}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^2\vartheta-\left(\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{35}{8}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^4\vartheta$$
$$\left(\frac{\alpha}{R}\right)^3 = 1-\frac{9}{8}\frac{Q}{\alpha}+\left(3\varepsilon+\frac{9}{2}\varepsilon^2+\frac{45}{4}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^2\vartheta+\left(\frac{3}{2}\varepsilon^2-\frac{105}{8}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^4\vartheta$$
$$\left(\frac{\alpha}{R}\right)^5 = 1-\frac{15}{8}\frac{Q}{\alpha}+\left(5\varepsilon+\frac{15}{2}\varepsilon^2+\frac{75}{4}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^2\vartheta+\left(\frac{15}{2}\varepsilon^2-\frac{175}{8}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^4\vartheta.$$

Die entsprechenden Werte für $\frac{R}{\alpha'}$ und $\frac{R}{\alpha''}$ ergeben sich, wenn wir überall α, ε, Q durch α', ε', Q' bzw. α'', ε'', Q'' ersetzen. Setzen wir diese Werte in die obigen drei Gleichungen ein, so erhalten wir Ausdrücke für die Potentiale an den Oberflächen. Da wir aber die Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts gemacht haben, so muß φ längs den Oberflächen konstant sein. Dies ist aber nur möglich,

wenn die Faktoren von $\cos^2\vartheta$ und $\cos^4\vartheta$ verschwinden (der von $\cos^6\vartheta$ ist eine Größe 6. Ordnung, kann also vernachlässigt werden, höhere Potenzen von $\cos\vartheta$ treten nicht auf). Auf diesem Wege erhalten wir folgende Gleichungen, die weiterhin mit Ia, Ib, IIa, IIb, IIIa, IIIb zitiert werden mögen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{3}{2}\,\delta\left(\frac{8}{15}\,\varepsilon+\frac{12}{35}\,\varepsilon^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}-\frac{2}{3}\,\delta\left(2\,\varepsilon+3\,\varepsilon^2+\frac{15}{2}\,\frac{Q}{\alpha}\right)\\
&\qquad+\frac{8}{15}\,\varepsilon^2\delta+\varepsilon\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{3}{2}\,\varepsilon^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot\frac{1}{\varkappa\pi}\\
&+\frac{5}{3}\,\delta\,\frac{Q}{\alpha}-\frac{4}{3}\,\varepsilon\left\{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta'-\delta)\,(1-\varepsilon')+\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3(\delta''-\delta')\,(1-\varepsilon'')\right\}\\
&\qquad-\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta'-\delta)+\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3(\delta''-\delta')\right\}\left\{\frac{3}{2}\,\varepsilon^2+\frac{15}{4}\,\frac{Q}{\alpha}\right\}\\
&+\frac{4}{5}\left\{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5(\delta'-\delta)\left(\varepsilon'-\frac{3}{2}\varepsilon'^2-\varepsilon\,\varepsilon'\right)+\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^5(\delta''-\delta')(\varepsilon''-\frac{3}{2}\,\varepsilon''^2-\varepsilon\,\varepsilon'')\right\}\\
&\qquad+\frac{12}{7}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7(\delta'-\delta)\,\varepsilon'^2\\
&+\frac{12}{7}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^7(\delta''-\delta')\,\varepsilon''^2+\frac{5}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7(\delta'-\delta)\,\frac{Q'}{\alpha'}+\frac{5}{3}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^7(\delta''-\delta')\,\frac{Q''}{\alpha''}=0.
\end{aligned}\right\}\ \text{Ia.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{16}{15}\,\varepsilon^2\delta-\varepsilon\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}-\frac{7}{2}\,\varepsilon^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{35}{9}\,\delta\,\frac{Q}{\alpha}\\
&\qquad+\frac{4}{3}\left(\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{35}{8}\,\frac{Q}{\alpha}\right)\left\{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta'-\delta)+\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3(\delta''-\delta')\right\}\\
&+\frac{12}{5}\left\{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5(\delta'-\delta)\,\varepsilon\,\varepsilon'+\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^5(\delta''-\delta')\,\varepsilon\,\varepsilon''\right\}\\
&\qquad-2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7(\delta'-\delta)\,\varepsilon'^2-2\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^7(\delta''-\delta')\cdot\varepsilon''^2\\
&-\frac{35}{18}\cdot\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7(\delta'-\delta)\,\frac{Q'}{\alpha'}-\frac{35}{18}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^7(\delta''-\delta')\,\frac{Q''}{\alpha''}=0.
\end{aligned}\right\}\ \text{Ib.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\left(\frac{4}{5}\,\varepsilon+\frac{18}{35}\,\varepsilon^2\right)+(\delta'-\delta)\left(\frac{4}{5}\,\varepsilon'+\frac{18}{35}\,\varepsilon'^2\right)\\
&\qquad-\frac{4}{3}\cdot\varepsilon'\delta'-2\,\varepsilon'^2\delta'-5\,\frac{Q'}{\alpha'}\,\delta'+\frac{8}{15}\,\varepsilon\varepsilon'\,\delta\\
&+\frac{8}{15}\,\varepsilon'^2(\delta'-\delta)+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\varepsilon'\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{3}{2}\,\varepsilon'^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\\
&\qquad+\frac{5}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\delta\,\frac{Q}{\alpha}+\frac{5}{3}\,(\delta'-\delta)\,\frac{Q'}{\alpha'}
\end{aligned}\right\}\ \text{IIa.}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^3(\delta''-\delta')\left\{\varepsilon'+\frac{3}{2}\varepsilon'^2+\frac{15}{4}\frac{Q'}{\alpha'}-\varepsilon'\varepsilon''\right\}\\
&\qquad+\frac{4}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^5(\delta''-\delta')\left\{\varepsilon''-\frac{3}{2}\varepsilon''^2-\varepsilon'\varepsilon''\right\}\\
&+\frac{12}{7}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^7(\delta''-\delta')\varepsilon''^2+\frac{5}{3}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^7(\delta''-\delta')\frac{Q''}{\alpha''}=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{16}{15}\varepsilon'^2\delta'+\frac{8}{5}\varepsilon'^2\delta-\frac{8}{5}\varepsilon\varepsilon'\delta-\varepsilon'\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}-\frac{7}{2}\varepsilon'^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\\
&\qquad+\frac{35}{6}\delta'\frac{Q'}{\alpha'}-\frac{35}{18}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\delta\frac{Q}{\alpha}\\
&-\frac{35}{18}(\delta'-\delta)\frac{Q'}{\alpha'}+\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^3(\delta''-\delta')\varepsilon'^2+\frac{35}{6}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^3(\delta''-\delta')\frac{Q'}{\alpha'}\\
&\qquad+\frac{12}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^5(\delta''-\delta')\varepsilon'\varepsilon''\\
&-2\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^7(\delta''-\delta')\varepsilon''^2-\frac{35}{18}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^7(\delta''-\delta')\frac{Q''}{\alpha''}=0.
\end{aligned}
\qquad \text{IIb.}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(\frac{4}{5}\varepsilon+\frac{18}{35}\varepsilon^2\right)+(\delta'-\delta)\left(\frac{4}{5}\varepsilon'+\frac{18}{35}\varepsilon'^2\right)\\
&\qquad+(\delta''-\delta')\left(\frac{4}{5}\varepsilon''+\frac{18}{35}\varepsilon''^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot\frac{1}{\varkappa\pi}\\
&+\varepsilon''\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{3}{2}\varepsilon''^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}-\frac{4}{3}\varepsilon''\delta''+\frac{8}{15}\delta\varepsilon\varepsilon''\\
&\qquad+\frac{8}{15}(\delta'-\delta)\varepsilon'\varepsilon''+\frac{8}{15}(\delta''-\delta')\varepsilon''^2\\
&-2\delta''\varepsilon''^2-5\cdot\frac{Q''}{\alpha''}\cdot\delta''+\frac{5}{3}\delta\frac{Q}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^2+\frac{5}{3}(\delta'-\delta)\frac{Q'}{\alpha'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\\
&\qquad+\frac{5}{3}(\delta''-\delta')\frac{Q''}{\alpha''}=0.
\end{aligned}
\qquad \text{IIIa.}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{16}{15}\varepsilon''^2\delta''+\frac{8}{5}\varepsilon''^2\delta'-\frac{8}{5}\varepsilon\varepsilon''\delta-\frac{8}{5}\varepsilon'\varepsilon''(\delta'-\delta)-\varepsilon''\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\\
&\qquad-\frac{7}{2}\varepsilon''^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\\
&+\frac{35}{6}\delta''\frac{Q''}{\alpha''}-\frac{35}{18}\delta\frac{Q}{\alpha}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^2-\frac{35}{18}(\delta'-\delta)\frac{Q'}{\alpha'}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\\
&\qquad-\frac{35}{18}(\delta''-\delta')\frac{Q''}{\alpha''}=0.
\end{aligned}
\qquad \text{IIIb.}
$$

Setzen wir die sich aus Ib, IIb, IIIb ergebenden Werte von $\frac{Q}{\alpha}, \frac{Q'}{\alpha'}, \frac{Q''}{\alpha''}$ bzw. in Ia, IIa, IIIa ein, so erhalten wir die Gleichungen Ic, IIc, IIIc:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{8}{15}\varepsilon\delta+\frac{4}{105}\varepsilon^2\cdot\delta+\left\{\frac{4}{3}\varepsilon+\frac{10}{7}\varepsilon^2\right\}\left\{\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta'-\delta)+\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3(\delta''-\delta')\right\}\\
&\qquad-\frac{4}{5}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5(\delta'-\delta)\varepsilon'\\
&-\frac{4}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^5(\delta''-\delta')\varepsilon''+\frac{6}{5}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5(\delta'-\delta)\varepsilon'^2+\frac{6}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^5(\delta''-\delta')\varepsilon''^2\\
&\qquad-\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta'-\delta)\cdot\varepsilon\varepsilon'\\
&-\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3(\delta''-\delta')\varepsilon\varepsilon''-\frac{44}{35}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^5(\delta'-\delta)\varepsilon\varepsilon'-\frac{44}{35}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^5(\delta''-\delta')\varepsilon\varepsilon''\\
&\qquad-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}-\frac{1}{7}\varepsilon\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{3}{2}\varepsilon^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}=0.
\end{aligned}\right\}\text{Ic.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\left(\frac{4}{5}\varepsilon+\frac{18}{35}\varepsilon^2\right)-\frac{8}{15}\varepsilon'\delta'-\frac{4}{5}\varepsilon'\delta-\frac{4}{105}\varepsilon'^2\delta'+\frac{34}{105}\varepsilon'^2\delta-\frac{88}{105}\varepsilon\varepsilon'\delta\\
&-\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^3(\delta''-\delta')\left\{\varepsilon'+\frac{15}{14}\varepsilon'^2-\varepsilon'\varepsilon''\right\}\\
&\qquad+\frac{4}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^5(\delta''-\delta')\left\{\varepsilon''-\frac{3}{2}\varepsilon''^2+\frac{11}{7}\varepsilon'\varepsilon''\right\}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{1}{7}\varepsilon'\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}-\frac{3}{2}\varepsilon'^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}=0.
\end{aligned}\right\}\text{IIc.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\left(\frac{4}{5}\varepsilon+\frac{18}{35}\varepsilon^2\right)+(\delta'-\delta)\left(\frac{4}{5}\varepsilon'+\frac{18}{35}\varepsilon'^2\right)-\frac{8}{15}\varepsilon''\delta''-\frac{4}{5}\varepsilon''\delta'\\
&\qquad-\frac{4}{105}\varepsilon''^2\delta''\\
&+\frac{34}{105}\varepsilon''^2\delta'-\frac{88}{105}\varepsilon\varepsilon''\delta-\frac{88}{105}\varepsilon'\varepsilon''\delta'+\frac{88}{105}\varepsilon'\varepsilon''\delta+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\\
&\qquad+\frac{1}{7}\varepsilon''\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}-\frac{3}{2}\varepsilon''^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}=0.
\end{aligned}\right\}\text{IIIc.}$$

Es ist wichtig, daß in diesen Gleichungen $\frac{Q}{\alpha}, \frac{Q'}{\alpha'}, \frac{Q''}{\alpha''}$ nicht mehr auftreten. Als Gleichung IV erhalten wir folgende:

$$1=\frac{\delta}{\delta_m}+\frac{\delta'-\delta}{\delta_m}\cdot\frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}\cdot\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3+\frac{\delta''-\delta'}{\delta_m}\cdot\frac{1-\varepsilon''}{1-\varepsilon}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3. \qquad \text{IV.}$$

Sie ergibt sich, wenn wir die Erde als Superposition der drei homogenen Ellipsoide auffassen und die Formel für den Inhalt eines Ellipsoides auf sie anwenden; denn die Kugelfunktion 4. Ordnung ergibt, über die Kugel summiert, den Wert 0.

Die Gleichungen Ia, Ib, IIa, IIb, IIIa, IIIb sollen als Grundlage für die weitere Rechnung dienen.

Nach Wiechert beträgt $\frac{Q}{\alpha}$ vier Einheiten der 7. Dezimale. Bei Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts für das Erdinnere ergibt sich für $\frac{Q'}{\alpha'}$ ein noch kleinerer Wert. Wir dürfen aus unserer Rechnung ähnliche Resultate für $\frac{Q}{\alpha}, \frac{Q'}{\alpha'}, \frac{Q''}{\alpha''}$ erwarten. Demnach müssen wir die 7. Dezimale unbedingt mit berücksichtigen. Eine Berücksichtigung der 8. Dezimale erscheint zunächst zwecklos, da sich infolge der Vernachlässigung der dritten Potenzen von ε, ε', ε'' doch eine falsche Zahl für dieselbe ergibt. Trotzdem aber fand die 8. Dezimale Berücksichtigung; denn wir dürfen so auf größere Sicherheit in der 7. Dezimale hoffen, und bei der Rechnung, die die Größen 4. Ordnung mitberücksichtigt, ist es uns gerade um die Ermittlung von $\frac{Q}{\alpha}, \frac{Q'}{\alpha'}, \frac{Q''}{\alpha''}$ zu tun, und da ist eine Genauigkeit in der 7. Dezimale durchaus erforderlich.

Die numerische Rechnung wurde mit einer zehnstelligen Rechenmaschine ausgeführt.

§ 10. Numerische Rechnung unter Vernachlässigung der Größen vierter Ordnung.

Wir können nunmehr, nachdem alle erforderlichen Formeln abgeleitet sind, zur numerischen Rechnung übergehen. Wie bereits erwähnt, wollen wir zunächst die Größen vierter Ordnung vernachlässigen. Die Oberflächen von Mantel, Mittelschicht und Kern werden dann aufgefaßt als Rotationsellipsoide. Q, Q', Q'' werden $= 0$ gesetzt. Für diesen Fall gehen die Gleichungen Ia, IIa, IIIa und IV über in folgende:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3(\delta''-\delta')\left\{\frac{3}{5}\,\varepsilon''\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^2-\varepsilon\right\} &= \frac{8}{15}\varepsilon\delta-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi} \\ &\quad -\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta'-\delta)\left\{\frac{3}{5}\,\varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2-\varepsilon\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon'\left\{\frac{8}{15}\delta'+\frac{4}{5}\delta+\frac{4}{3}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^3(\delta''-\delta')\right\}\\ =\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{4}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^5(\delta''-\delta')\varepsilon''+\frac{4}{5}\varepsilon\delta.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\varepsilon''\left\{\delta''+\frac{3}{2}\delta'\right\}=\frac{15}{16}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{3}{2}\varepsilon\delta+\frac{3}{2}\varepsilon'(\delta'-\delta). \quad (3)$$

$$\delta''-\delta'=\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m-\delta)(1-\varepsilon+\varepsilon'')-\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(\delta'-\delta)(1-\varepsilon'+\varepsilon''). \quad (4)$$

Diese Gleichungen mögen mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet werden. Die Gleichungen Ib, IIb, IIIb fallen ganz fort, da sie nur Größen vierter Ordnung enthalten. Wir wollen aus den Gleichungen 1, 2, 3, 4 die Unbekannten explizit durch bekannte Größen ausdrücken. Gleichung 4 können wir folgende Gestalt geben:

$$\begin{aligned}\delta''-\delta'=&\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(1-\varepsilon)(\delta_m-\delta)-\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(1-\varepsilon')(\delta'-\delta)\\ &+\varepsilon''\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m-\delta)-\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(\delta'-\delta)\right\}.\end{aligned}$$

Setzen wir die rechte Seite gleich dem aus (1) sich ergebenden Wert für $(\delta''-\delta')$, so erhalten wir folgende Formel:

$$\varepsilon''=\frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left\{\frac{2}{3}\varepsilon\delta-\frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\right\}-\varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^5(\delta'-\delta)+\frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5(\delta_m-\delta)}{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m-\delta)-\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(\delta'-\delta)}.$$

Setzen wir andererseits den Wert für $(\delta''-\delta')$, der aus (2) folgt:

$$\delta''-\delta'=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}+\frac{4}{5}\varepsilon\delta-\frac{8}{15}\varepsilon'\delta'-\frac{4}{5}\varepsilon'\delta}{\frac{4}{3}\varepsilon'\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^3-\frac{4}{5}\varepsilon''\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^5}$$

ebenfalls gleich dem Wert von $(\delta''-\delta')$, der aus (4) folgt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\cdot\varepsilon''\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^5\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m-\delta)-\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(\delta'-\delta)\right\}-\frac{4}{3}\varepsilon'\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^3(\delta_m-\delta)+\frac{4}{3}\varepsilon'(\delta'-\delta)\\ =\varepsilon'\left(\frac{8}{15}\delta'+\frac{4}{5}\delta\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}-\frac{4}{5}\varepsilon\delta.\end{aligned}$$

Setzen wir den durch Kombination von (1) und (4) gefundenen Wert von ε'' in diese Gleichung ein, so fällt δ' heraus, und wir erhalten:

$$\varepsilon' = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^5\left\{\frac{2}{3}\varepsilon\delta - \frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\right\} + \frac{4}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^5(\delta_m - \delta) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi} + \frac{4}{5}\varepsilon\delta}{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^3(\delta_m - \delta) + \delta\right\}}.$$

In dieser Gleichung treten auf der rechten Seite nur noch bekannte Größen auf; ε' ist daher berechenbar. Das Resultat ist folgendes:

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
$\frac{1}{\varepsilon'}$	321,54	324,25	327,12	330,12

Weiter ergibt sich δ_m', die mittlere Dichte von Mittelschicht und Kern, aus der Formel:

$$\delta_m' = \delta + \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^3 \cdot \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'}(\delta_m - \delta).$$

Wir erhalten folgende Werte:

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
δ_m'	7,71	7,54	7,36	7,19

Die für δ_m' gefundenen Werte sind auf zwei Dezimalen abgerundet.

Wir können jetzt zur Berechnung von δ', δ'' und ε'' schreiten. Zu diesem Zwecke geben wir Gleichung 3 folgende Gestalt:

$$\delta'' = \frac{\frac{15}{16}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi} + \frac{3}{2}\varepsilon\delta + \frac{3}{2}\varepsilon'(\delta' - \delta)}{\varepsilon''} - \frac{3}{2}\delta'.$$

In diese Gleichung setzen wir den Wert für ε'', den wir gefunden hatten,

$$\varepsilon'' = \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left\{\frac{2}{3}\varepsilon\delta - \frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\right\} - \varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^5(\delta' - \delta) + \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5(\delta_m - \delta)}{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m - \delta) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(\delta' - \delta)}$$

ein und erhalten:

$$\delta'' = \frac{\left[\frac{15}{16}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{1}{\varkappa\pi} + \frac{3}{2}\varepsilon\delta + \frac{3}{2}\varepsilon'(\delta' - \delta)\right]\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m - \delta) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(\delta' - \delta)\right]}{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left\{\frac{2}{3}\varepsilon\delta - \frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\right\} - \varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^5(\delta' - \delta) + \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5(\delta_m - \delta)} - \frac{3}{2}\delta'$$

Aus (1) folgt nun weiter:

$$\varepsilon'' = \frac{\frac{8}{15}\varepsilon\delta - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi} - \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta' - \delta)\left\{\frac{3}{5}\varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \varepsilon\right\}}{\frac{4}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^5(\delta'' - \delta')} + \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2.$$

Diesen Wert setzen wir in (4) ein; so erhalten wir:

$$= \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(1-\varepsilon)(\delta_m - \delta) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(1-\varepsilon')\delta' - \delta) + \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left[\frac{2}{3}\varepsilon\delta - \frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi} - \frac{5}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta' - \delta)\left\{\frac{3}{5}\varepsilon\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \varepsilon\right\}\right]}{1 - \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2} \quad \delta'' - \delta'$$

Setzen wir nun endlich den obigen Wert für δ'' in diese Gleichung ein, so erhalten wir eine Gleichung, in der nur noch δ' als Unbekannte auftritt. Sie lautet:

$$= \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(1-\varepsilon)(\delta_m - \delta) + \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left\{\frac{2}{3}\varepsilon\delta - \frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\right\} - (\delta' - \delta)\left\{\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(1-\varepsilon') + \frac{5}{3}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left(\frac{3}{5}\varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \varepsilon\right)\right.}{1 - \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^2}$$

$$\frac{\left[\frac{15}{16}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi} + \frac{3}{2}\varepsilon\delta + \frac{3}{2}\varepsilon'(\delta' - \delta)\right]\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m - \delta) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(\delta' - \delta)\right]}{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left\{\frac{2}{3}\varepsilon\delta - \frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\right\} - \varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^5(\delta' - \delta) + \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5(\delta_m - \delta)} - \frac{5}{2}\delta'$$

Multiplizieren wir aus und vernachlässigen wir wieder die Größen vierter Ordnung, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$A(\delta' - \delta)^2 + B(\delta' - \delta) + C = 0\,.$$

Hierbei haben A, B, C folgende Bedeutung:

$$A = \varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^5\left(\frac{5}{2} - \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3\right) - \frac{3}{2}\varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3,$$

$$B = \frac{3}{2}\varepsilon'\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m - \delta) - \frac{15}{16}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\cdot\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3 - \frac{3}{2}\varepsilon\delta\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3$$
$$- \left\{\frac{5}{2} - \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3\right\}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left(\frac{2}{3}\varepsilon\delta - \frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\right) + \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5(\delta_m - \delta)\right\}$$
$$+ \varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^5\left\{\frac{5}{2}\delta + \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m - \delta\right\},$$

$$C = \left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m - \delta)\cdot\left\{\frac{15}{16}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi} + \frac{3}{2}\varepsilon\delta\right\}.$$

Alle in A, B, C auftretenden Größen sind bekannt.

ε'' erhalten wir dann durch die Formel:

$$\varepsilon'' = \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5\left\{\frac{2}{3}\varepsilon\delta - \frac{5}{8}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}\right\} - \varepsilon'\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^5(\delta' - \delta) + \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^5(\delta_m - \delta)}{\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(\delta_m - \delta) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(\delta' - \delta)}$$

und δ'' durch

$$\delta'' = \delta' + (\delta_m - \delta\left(\frac{\alpha}{\alpha''}\right)^3(1 - \varepsilon + \varepsilon'' - (\delta' - \delta)\left(\frac{\alpha'}{\alpha''}\right)^3(1 - \varepsilon' + \varepsilon'').$$

Die Formel für δ' ist quadratisch und liefert daher zwei Werte; der eine derselben liegt jedoch etwa bei 20 und kommt nicht in Betracht. Berücksichtigen wir nun den anderen Wert, so liefert die Ausführung der Rechnung folgende Tabelle:

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
δ'	7,2379	6,6193	5,9998	5,3854
δ''	8,3221	8,7330	9,1447	9,5500
$\frac{1}{\varepsilon'}$	321,54	324,25	327,12	330,12
$\frac{1}{\varepsilon''}$	327,63	335,52	343,58	352,21

Die bereits früher gefundenen Werte für ε' sind der besseren Übersicht wegen noch einmal mit aufgeführt.

Die Rechnung zweiter Ordnung ist damit erledigt. Die Probe zeigt, daß die gefundenen Werte den Gleichungen 1—4 genügen.

§ 11. Numerische Rechnung mit Berücksichtigung der Größen vierter Ordnung.

Wir kommen jetzt zur genaueren Rechnung, in welcher die Größen vierter Ordnung noch Berücksichtigung finden sollen. Der Hauptzweck dieser Rechnung ist, uns einen Überblick über die Abweichungen der drei Oberflächen von den ihnen entsprechenden Ellipsoiden zu verschaffen, d. h. die Ermittlung von Q, Q', Q''. Wir gehen nun folgendermaßen vor: Die Gleichungen Ic, IIc, IIIc enthalten als Unbekannte nur die vier Größen δ', δ'', ε', ε''. Q, Q', Q'' kommen nicht darin vor. Die Werte, die wir für δ', δ'', ε', ε'' gefunden haben, werden nur geringer Abänderungen bedürfen, damit sie auch den Gleichungen Ic, IIc, IIIc und IV genügen. Diese Abänderungen seien folgendermaßen bezeichnet:

die	von	δ''	mit	γ_1
„	„	δ'	„	γ_2
„	„	ε''	„	γ_3
„	„	ε'	„	γ_4.

Wir wollen nun annehmen, daß γ_1 und γ_2 klein von der zweiten Ordnung, γ_3 und γ_4 von der vierten Ordnung sind. Die Berechtigung dieser Annahme wird durch den Erfolg bestätigt werden. γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 sind jetzt Unbekannte, während wir für δ', δ'', ε', ε'' die durch die Rechnung des § 10 gefundenen Werte einsetzen. $F(\delta', \delta'', \varepsilon', \varepsilon'')$ sei ein Symbol für eine beliebige der Gleichungen Ic, IIc, IIIc, IV. Bilden wir nun:

$$F(\delta'' + \gamma_1,\ \delta' + \gamma_2,\ \varepsilon'' + \gamma_3,\ \varepsilon' + \gamma_4) - F(\delta'',\ \delta',\ \varepsilon'',\ \varepsilon')$$

für jede der vier Gleichungen, so erhalten wir für die Unbekannten γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 vier lineare Gleichungen. Die Ausrechnung liefert folgende Werte:

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
γ_1	+0,017 88	+0,017 09	+0,016 67	+0,025 44
γ_2	−0,013 97	−0,013 35	−0,012 76	−0,019 46
γ_3	+0,000 005 95	+0,000 004 83	+0,000 000 75	−0,000 003 13
γ_4	−0,000 000 72	−0,000 000 68	−0,000 000 80	−0,000 001 51

Als endgültige Werte für δ', δ'', ε', ε'' erhalten wir demnach folgende:

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
δ'	7,223 93	6,605 95	5,987 04	5,365 94
δ''	8,339 98	8,750 09	9,161 37	9,575 44
ε'	0,003 109 31	0,003 083 36	0,003 056 18	0,003 027 71
ε''	0,003 058 17	0,002 985 28	0,002 911 28	0,002 836 05
$\frac{1}{\varepsilon'}$	321,61	324,32	327,21	330,28
$\frac{1}{\varepsilon''}$	326,99	334,98	343,49	352,60

Es bleibt noch die Berechnung von Q, Q', Q'' übrig. Sie geschieht durch die Gleichungen Ib, II, IIIb. Setzen wir die endgültigen Werte von δ', δ'', ε', ε'' in sie ein, so erhalten wir drei Gleichungen für $\frac{Q}{\alpha}$, $\frac{Q'}{\alpha'}$, $\frac{Q''}{\alpha''}$, deren Auflösung zu folgendem Resultat führt.

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
$\frac{Q}{\alpha}$	0,000 000 43	0,000 000 48	0,000 000 53	0,000 000 59
$\frac{Q'}{\alpha'}$	0,000 000 11	0,000 000 17	0,000 000 22	0,000 000 28
$\frac{Q''}{\alpha''}$	0,000 000 05	0,000 000 05	0,000 000 05	0,000 000 06

Weiter ergibt sich folgende Tabelle für Q, Q', Q'' (in Metern)

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
Q	2,74	3,06	3,38	3,76
Q'	0,57	0,88	1,14	1,45
Q''	0,20	0,20	0,20	0,24

Diese Tabelle gibt gleichzeitig die Abweichungen der 3 Flächen von den entsprechenden Ellipsoiden für den Pol an.

und für die Abweichungen am Äquator:

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
Mantel:	1,03	1,15	1,27	1,41
Mittelschicht:	0,21	0,33	0,43	0,54
Kern:	0,08	0,08	0,08	0,09

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Ziffer der achten Dezimalstelle keineswegs der wirklichen entsprechen wird, da schon infolge der Vernachlässigung der Größen 6. Ordnung eine Unsicherheit in derselben vorhanden ist. In bezug auf die 7. Dezimale ist die Rechnung jedoch zuverlässig (vgl. dazu § 9).

§ 12. Kontrollrechnung.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, Kontrollgleichungen abzuleiten. Wir wenden zu diesem Zwecke die Gleichungen I, II, III einmal für den Äquator, dann für den Pol an und setzen beide Werte gleich; wir setzen also in den drei Gleichungen bzw. $R = a,\ a',\ a''$, dann $R = b,\ b',\ b''$. Die Gleichheit des Potentials für Pol und Äquator folgt daraus, daß die Oberfläche von Mantel, Mittelschicht und Kern ja Niveauflächen sein sollen. Auf diesem Wege erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\left\{\frac{2}{3}(2\varepsilon-\varepsilon^2)-\left(\frac{1}{2}+(1-\varepsilon)^2\right)\left(\frac{8}{15}\varepsilon+\frac{12}{35}\varepsilon^2\right)\right\}\\
&-\frac{4}{3}(\delta'-\delta)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3\left\{-\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon\varepsilon'+\frac{6}{5}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\varepsilon'}{2}-\frac{3}{4}\varepsilon'^2+\varepsilon\varepsilon'\right)-\frac{3}{14}\varepsilon'^2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^4\right\}\\
&-\frac{4}{3}(\delta''-\delta')\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3\left\{-\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon\varepsilon''+\frac{6}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\varepsilon''}{2}-\frac{3}{4}\varepsilon''^2+\varepsilon\varepsilon''\right)-\frac{3}{14}\varepsilon''^2\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^4\right\}\\
&-\frac{5}{9}\delta\frac{Q}{\alpha}-\frac{5}{6}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^3(\delta'-\delta)\frac{Q}{\alpha}-\frac{5}{6}\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^3(\delta''-\delta')\frac{Q}{\alpha}+\frac{5}{18}(\delta'-\delta)\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^7\frac{Q'}{\alpha'}\\
&+\frac{5}{18}(\delta''-\delta')\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^7\frac{Q''}{\alpha''}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}=0.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\delta'(2\varepsilon'-\varepsilon'^2)-\left(\frac{1}{2}+(1-\varepsilon')^2\right)\left\{\delta\left(\frac{8}{15}\varepsilon+\frac{12}{35}\varepsilon^2-\left(\frac{8}{15}\varepsilon'+\frac{12}{35}\varepsilon'^2\right)\right)\right.\\
&\left.+\delta'\left(\frac{8}{15}\varepsilon'+\frac{12}{35}\varepsilon'^2\right)\right\}
\end{aligned}\right|$$

$$-\frac{4}{3}(\delta''-\delta')\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^3\left\{-\varepsilon'-\varepsilon'^2+\varepsilon'\varepsilon''+\frac{6}{5}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\varepsilon''}{2}-\frac{3}{4}\varepsilon''^2+\varepsilon'\varepsilon''\right)\right.$$
$$\left.-\frac{3}{14}\varepsilon''^2\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^4\right\}$$
$$+\frac{5}{18}\delta\frac{Q}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2+\frac{5}{18}(\delta'-\delta)\frac{Q'}{\alpha'}-\frac{5}{6}\delta'\frac{Q'}{\alpha'}-\frac{5}{6}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^3(\delta''-\delta')\frac{Q'}{\alpha'}$$
$$+\frac{5}{18}(\delta''-\delta')\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\frac{Q''}{\alpha''}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}=0.$$

$$\frac{2}{3}\delta''(2\varepsilon''-\varepsilon''^2)-\left(\frac{1}{2}+(1-\varepsilon'')^2\right)\left\{\delta\left(\frac{8}{15}\varepsilon+\frac{12}{35}\varepsilon^2-\left(\frac{8}{15}\varepsilon'+\frac{12}{35}\varepsilon'^2\right)\right)\right.$$
$$\left.+\delta'\left(\frac{8}{15}\varepsilon'+\frac{12}{35}\varepsilon'^2-\left(\frac{8}{15}\varepsilon''+\frac{12}{35}\varepsilon''^2\right)\right)+\delta''\left(\frac{8}{15}\varepsilon''+\frac{12}{35}\varepsilon''^2\right)\right\}$$
$$+\frac{5}{18}\delta\left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right)^2\frac{Q}{\alpha}+\frac{5}{18}(\delta'-\delta)\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2\frac{Q'}{\alpha'}+\frac{5}{18}(\delta''-\delta')\frac{Q''}{\alpha''}-\frac{5}{6}\delta''\frac{Q''}{\alpha''}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{\varkappa\pi}=0.$$

Setzen wir die gefundenen Werte für δ', δ'', ε', ε'', $\frac{Q}{\alpha}$, $\frac{Q'}{\alpha'}$, $\frac{Q''}{\alpha''}$ in diese Gleichungen ein, so zeigt sich die Übereinstimmung bis zur 6. Dezimale. In der 7. Dezimale kommt eine Abweichung bis zu 6 Einheiten vor. Bedenken wir, daß infolge der Vernachlässigung der Größen 6. Ordnung die gefundenen Werte von den wahren um mehrere Einheiten der 8. Dezimale abweichen werden, daß ferner diese Abweichung durch Faktoren noch vervielfältigt wird, so werden wir mit dem Ergebnis der Kontrolle zufrieden sein.

§ 13. Folgerungen für die Schwerkraftvariation. Diskussion der Resultate. Material von Kern und Mittelschicht.

Dieser Paragraph soll dazu dienen, die Folgerungen aus den gefundenen Werten zu ziehen. Zu diesem Zwecke seien zunächst die nötigen Formeln abgeleitet.

Als Ausgangsgleichung dient folgende:

$$\varphi=-\frac{\varkappa\Gamma}{R}\left[1-p\frac{a^2}{R^2}\cdot P^{(2)}(\cos\vartheta)+q\frac{a^4}{R^4}P^{(4)}(\cos\vartheta)\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R^2\sin^2\vartheta. \quad \text{A.}$$

Dabei bezeichnet R den Radiusvektor nach der Oberfläche der Erde, der dem Winkel ϑ entspricht. $P^{(2)}(\cos\vartheta)$ und $P^{(4)}(\cos\vartheta)$ bezeichnen die Kugelfunktionen 2. und 4. Ordnung:

$$P^{(2)}(\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right),$$

$$P^{(4)}(\cos\vartheta) = \frac{35}{8}\left(\cos^4\vartheta - \frac{6}{7}\cos^2\vartheta + \frac{3}{35}\right).$$

p und q sind Konstanten, die von der Massenverteilung im Erdinnern abhängen, und zwar ist p klein von der 2. Ordnung und q von der 4. Ordnung. Die übrigen Bezeichnungen sind bereits erklärt. Bei Vernachlässigung der beiden letzten Klammerglieder erscheint die Erde als Kugel. Berücksichtigt man dagegen das p enthaltende Glied, so erscheint sie als Ellipsoid; und das q enthaltende Glied entspricht der Abweichung von der Ellipsoidgestalt. Nun ist:

$$R = \alpha\left(1 - \varepsilon\cos^2\vartheta - \frac{3}{8}\varepsilon^2\sin^2(2\vartheta)\right) + QP^{(4)}(\cos\vartheta)$$

oder:

$$R = \alpha\left\{1 + \frac{3}{8}\frac{Q}{\alpha} - \left(\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{15}{4}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^2\vartheta + \left(\frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{35}{8}\frac{Q}{\alpha}\right)\cos^4\vartheta\right\}.$$

Diesen Wert setzen wir in die obige Gleichung ein und ordnen wieder in der Klammer nach Potenzen vom $\cos^2\vartheta$. Auf Grund der Voraussetzung des hydrostatischen Gleichgewichtes müssen die Faktoren von $\cos^2\vartheta$ und $\cos^4\vartheta = 0$ sein. So erhalten wir:

$$\left(\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{15}{4}\frac{Q}{\alpha}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{g_a^*}{g_a} - 3p\right) + \frac{35}{8}q - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{35}{8}\frac{Q}{\alpha} = 0$$

oder:

$$\frac{Q}{\alpha} = \frac{12}{35}\varepsilon\frac{g_a^*}{g_a} - \frac{12}{35}\varepsilon^2 - \frac{24}{35}\varepsilon p + q.$$

Wenden wir ferner die Gleichung A einmal auf den Pol, dann auf den Äquator an, setzen wir beide Werte einander gleich, und bedenken wir, daß $b = a(1-e)$ ist, so erhalten wir:

$$e(1+e) = \frac{3}{2}p(1+2e) + \frac{g_a^* \cdot a^2}{\varkappa\Gamma} - \frac{5}{8}q.$$

Da nun

$$g^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)^2$$

ist und für Pol und Äquator das 2. Glied $= 0$ ist, da hier Radiusvektor und Normale zusammenfallen, so erhalten wir:

$$g_a = \frac{\varkappa\Gamma}{a^2}\left(1 + \frac{3}{2}p - \frac{g_a^* \cdot a^2}{\varkappa\Gamma} + \frac{15}{8}q\right)$$

und

$$g_p = \frac{\varkappa \Gamma}{b^2}\left(1 - 3p\frac{a^2}{b^2} + 5q\frac{a^4}{b^4}\right).$$

Setzen wir in die Gleichung für $e(1+e)$ den Wert:

$$\frac{a^2}{\varkappa\Gamma} = \frac{1}{g_a}\left(1 + \frac{3}{2}p - \frac{g_a^* \cdot a^2}{\varkappa\Gamma} + \frac{15}{8}q\right)$$

ein, so erhalten wir:

$$\frac{3}{2}p = e - e^2 - \frac{1}{2}\frac{g_a^*}{g_a} + \frac{3}{4}\left(\frac{g_a^*}{g_a}\right)^2 + \frac{1}{2}e\left(\frac{g_a^*}{g_a}\right) + \frac{5}{8}q.$$

In diese Gleichung setzen wir den sich aus der Gleichung für $\frac{Q}{\alpha}$ ergebenden Wert für q ein; ferner setzen wir $e = \varepsilon - \frac{5}{8}\frac{Q}{\alpha}$; die Glieder mit $\frac{Q}{\alpha}$ vernichten sich dann gerade gegenseitig, und wir erhalten:

$$\frac{3}{2}p = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{g_a^*}{g_a} + \frac{1}{7}\varepsilon\frac{g_a^*}{g_a} + \frac{3}{4}\left(\frac{g_a^*}{g_a}\right)^2 \qquad \text{B.}$$

Setzen wir nun in der Gleichung:

$$\frac{Q}{\alpha} = \frac{12}{35}\varepsilon\frac{g_a^*}{g_a} - \frac{12}{35}\varepsilon^2 - \frac{24}{35}\varepsilon p + q$$

den sich aus der Gleichung B ergebenden Wert für p ein, so erhalten wir:

$$\frac{Q}{\alpha} = q - \frac{4}{5}\varepsilon^2 + \frac{4}{7}\varepsilon\frac{g_a^*}{g_a} \qquad \text{C.}$$

In der Gleichung für p treten nur Größen von der 2. und 4., in der für $\frac{Q}{\alpha}$ nur solche von der 4. Ordnung auf. Weiter gebrauchen wir die Clairautsche Formel. Um sie abzuleiten, setzen wir in der Formel:

$$g_p = \frac{\varkappa\Gamma}{b^2}\left(1 - 3p\frac{a^2}{b^2} + 5q\frac{a^4}{b^4}\right)$$

$b = a(1-e)$. Bilden wir dann $\frac{g_p - g_a}{\frac{\varkappa\Gamma}{a^2}}$, so erhalten wir:

$$\frac{g_p - g_a}{\frac{\varkappa\Gamma}{a^2}} = 2e + 3e^2 - \frac{3}{2}p(3 + 8e) + \frac{g_a^*}{\frac{\varkappa\Gamma}{a^2}} + \frac{25}{8}q.$$

Kombinieren wir diese Gleichung mit der für $e(1+e)$, so ergibt sich:

$$e + \frac{g_p - g_a}{\frac{\varkappa \Gamma}{a^2}} = \frac{5}{2}\frac{g_a^*}{\frac{\varkappa \Gamma}{a^2}} - 3ep + \frac{5}{4}q.$$

Wir dividieren durch:

$$\frac{g_a}{\frac{\varkappa \Gamma}{a^2}} = 1 + \frac{3}{2}p - \frac{g_a^*}{\frac{\varkappa \Gamma}{a^2}} + \frac{15}{8}q.$$

Setzen wir wieder $e = \varepsilon - \frac{5}{8}\frac{Q}{\alpha}$, und setzen ferner für p und q die Werte ein, so erhalten wir:

$$\frac{g_p - g_a}{g_a} = \frac{5}{2}\frac{g_a^*}{g_a} - \varepsilon - \frac{17}{14}\varepsilon\frac{g_a^*}{g_a} + \frac{15}{8}\frac{Q}{\alpha}.$$

Dies ist die Clairautsche Formel in erweiterter Form. Weiter erhalten wir für die Variation der Schwere an der Erdoberfläche[1]:

$$\frac{g_p + g_a}{2} - g_{45} = \frac{5}{8}\varepsilon g_a^* - \frac{1}{8}\varepsilon^2 g_a + \frac{105}{32}\frac{Q}{\alpha}g_a.$$

Setzen wir die gefundenen Werte in die beiden letzten Gleichungen ein, so ergibt sich folgende Tabelle:

δ	3,0	3,2	3,4	3,6
g_a^*		3,391 6	für alle δ	
$\frac{g_a^*}{g_a}$		0,003 467 79		
$\frac{g_p + g_a}{2} - g_{45}$	0,007 117	0,007 277	0,007 438	0,007 630
$\frac{g_p - g_a}{g_a}$	0,005 300	0,005 301	0,005 301	0,005 301
$g_p - g_a$	5,184 0	5,184 1	5,184 2	5,184 3
g_p	983,2140	983,2141	983,2142	983,2143
$\frac{g_p + g_a}{2}$	980,6220	980,6221	980,6221	980,6222
g_{45}	980,6149	980,6148	980,6147	980,6146

[1] Vgl. Helmert, Math. u. phys. Theor. d. höh. Geod. Bd. II, Kap. 2.

Als Einheit ist in dieser Tabelle 1 Gal gewählt. g_a^* wurde vermittels der Formel: $g_a^* = a\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ berechnet. g_a^* und demnach auch $\frac{g_a^*}{g_a}$ erweisen sich als konstant.

Als wesentliches Resultat ist zu vermerken, daß wir für jede Dichteannahme für den Mantel für $\frac{g_p + g_a}{2} - g_{45}$ einen Wert erhalten, der nur wenig über 7 Milligal liegt. Das ist der gleiche Wert, den 1897 Wiechert und einige Jahre später auch G. H. Darwin fand.

Es möge der Wert 3,4 für die Dichte des Mantels bevorzugt werden. Für Q finden wir dann einen Wert nahe bei 3 m, während sich in der Wiechertschen Arbeit $2^1/_2$ m ergab. Am Äquator überragt die Erdoberfläche die Ellipsoidfläche also etwa um 1 m; am Pol um 3 m. Auch für die übrigen Werte von δ sind diese Abweichungen sehr gering, daher ist also auch nach dieser Rechnung der gewöhnliche Brauch gerechtfertigt, die Erde als Ellipsoid zu betrachten. Nach innen zu nimmt diese Abweichung von der Ellipsoidgestalt ab: für die Mittelschicht beträgt sie im Maximum nur noch etwa 1 m, für den Kern bemißt sie sich nur noch nach Zentimetern. Die Abplattung selbst nimmt ebenfalls nach innen zu ab.

Als Material für den Kern kommt Nickel, Kobalt und Eisen in Betracht. Eisen hat im Mittel die Dichte 7,8, Nickel und Kobalt 8,8 bis 8,9. Je kleiner wir δ annehmen, einen desto größeren Eisen- und desto geringeren Nickel- und Kobaltgehalt müssen wir dem Kern zuschreiben, während die Dichte der Mittelschicht bei abnehmendem δ wächst. Wir können also sagen: Bei abnehmendem δ nähert sich der Übergang von Mittelschicht zum Kern dem stetigen Zustand, während der Sprung vom Mantel zur Mittelschicht immer jäher wird. Vielleicht ist es möglich, rückschließend durch Verwertung der Erdbebendiagramme, aus denen ja die Existenz der Unstetigkeitsflächen folgt, einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, welchen Wert von δ wir als den besten zu betrachten haben.

Für die Mittelschicht kommen Eisenerze in Betracht, deren Dichte im Mittel etwa 5,5 beträgt. Die Vermehrung der Dichte von Kern und Mittelschicht auf 9,1 bzw. 6,00 ist durch den Druck zu erklären. Bei Annahme des Wertes 3,4 für die Dichte des Mantels haben wir uns folgendes Bild von der Zusammensetzung der Erde zu machen: Sie besteht in der Hauptsache aus drei Schichten: die äußere reicht bis zu 1200 km Tiefe und wird aus Gesteinen gebildet. Darunter lagert

eine Schicht, die aus Eisenerzen besteht und welche etwa bis 2600 km Tiefe reicht; nach den Erdbebenbeobachtungen zerfällt diese jedoch wieder in zwei Schichten, deren Grenzfläche etwa in 1700 km Tiefe liegt. Die mittlere Dichte dieser beiden Schichten ist die der Eisenerze. Das Innerste der Erde wird durch den Kern, bestehend aus Nickel, Kobalt und Eisen ausgefüllt.

Überblicken wir noch einmal das Gesamtresultat. Als Hauptergebnis müssen wir den Aufschluß über die Dichteverteilung im Innern der Erde betrachten. Die Rechnung führte zur Annahme von Substanzen im Erdinnern, deren Vorhandensein uns auch durch andere Tatsachen, geologische und kosmische, nahegelegt wird: Nickel, Kobalt, Eisen. Für die Abplattung der Niveauflächen ergaben sich Werte, die mit der Tiefe abnehmen. Für Q erhielten wir einen Wert, der nahe bei dem von Wiechert gefundenen liegt, und weiter wurde bei den neuen Annahmen auch der von Wiechert gefundene Wert für die Variation der Schwerkraft mit der Breite wiedergewonnen.

Unsere Untersuchungen zeigen, wie Beobachtung und Rechnung, Hand in Hand gehend, uns Aufschluß über Dinge geben, die unmittelbar zu beobachten dem Menschen wohl für immer verwehrt bleiben wird.

Ich sage Herrn Geheimrat Wiechert für die liebenswürdige Unterstützung, die er mir bei der Anfertigung dieser Arbeit zuteil werden ließ, herzlichen Dank.

Lebenslauf.

ch wurde geboren am 28. September 1889 in Uchte (Hann.). Nach 12jährigem Schulbesuch erlangte ich Ostern 1908 das Zeugnis der Reife. Ich wandte ich dem Studium der Naturwissenschaften und Mathematik zu, und zwar studierte ich die ersten 4 Semester in München, das folgende in Marburg. Im Herbst 1910 unterbrach ich meine Studien auf 1 Jahr, um meiner Militärpflicht zu genügen; ich setzte sie dann in Göttingen fort, wo ich noch jetzt immatrikuliert bin.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.